

Математическое моделирование течений с испарением в двухслойной системе с теплоизолированной верхней границей**Д.В. Дягель¹, Е.В. Резанова²*¹ Сибирский федеральный университет (Красноярск, Россия)² Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)**Mathematical Modeling of Flows with Evaporation in a Two-layer System with a Thermally Insulated Upper Boundary***D.V. Dyagel¹, E.V. Rezanova²*¹ Siberian Federal University (Krasnoyarsk, Russia)² Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается задача о двухслойном течении в бесконечном горизонтальном канале с твердыми непроницаемыми стенками. Верхняя граница системы считается теплоизолированной, на нижней задан продольный градиент температуры. Нижний слой заполнен жидкостью, испаряющейся через термокапиллярную границу раздела, верхний — газо-паровой смесью. Исследуется случай стационарного течения, подвергающегося действию потока газа в верхнем слое и продольного градиента температуры. В газо-паровой смеси учитываются перекрестные эффекты термодиффузии и диффузионной теплопроводности.

Математическая модель основывается на приближении Буссинеска уравнений Навье-Стокса, для верхнего слоя также имеет место уравнение диффузии. Построены точные решения специального вида, где только продольная скорость отличается от нуля и зависит от поперечной координаты, а температура и концентрация пара в газе линейно зависят от продольной координаты. Испарение жидкости учитывается с помощью условий баланса масс и переноса тепла. Приведены профили скорости и температуры для систем "жидкость – газ" типа "этанол – воздух" и "HFE7100 – азот". Исследовано явление возникновения возвратных течений вблизи границы раздела сред.

Ключевые слова: двухслойная система, точные решения, испарение, эффект Соре, эффект Дюфура.

DOI 10.14258/izvasu(2017)4-16

Введение. Изучение точных решений специального вида актуально при описании течений

The problem of two-layer flow in an infinite horizontal channel with solid impermeable walls is studied. The upper boundary of the system is considered to be thermally insulated, and the longitudinal gradient of the temperature on the lower boundary is given. The lower layer is filled with a liquid that evaporates through the thermocapillary interface; the upper layer is a gas-vapor mixture. Stationary flows induced by action of gas flow in the upper layer and longitudinal temperature gradient are studied. The thermodiffusion and diffusive thermal conductivity effects are taken into account in the gas-vapor mixture. The mathematical model is based on the Boussinesq approximation of the Navier-Stokes equations, and the diffusion equation also holds for the upper layer. The exact solutions of a special type are constructed, where only the longitudinal velocity differs from zero and depends on the transverse coordinate, and the temperature and the vapor concentration are linearly dependent on the longitudinal coordinate. Evaporation of the liquid is taken into consideration using the mass balance and heat transfer conditions. Velocity and temperature profiles for liquid-gas systems such as "ethanol-air" and "HFE7100-nitrogen" are presented. The phenomenon of return flows near the interface is investigated.

Key words: Two-layer system, exact solutions, evaporation, Soret effect, Dufour effect.

жидкости в связи с возможностью рассмотрения влияния различных физических факторов на характер течения [1–5]. Достаточно большое внимание уделяется исследованию течений в двухслойных системах, сопровождающихся испарени-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-08-00291).

ем. Одной из первых подобных работ является [6]. Ряд работ посвящен исследованию конвективных течений с термокапиллярной границей раздела под действием сопутствующего потока газа и продольных градиентов температуры [7–9]. В [8] приведены результаты сравнения аналитических данных, полученных с помощью точных решений при заданных продольных градиентах температуры на стенках канала, с экспериментальными. Немаловажным является вопрос исследования устойчивости новых точных решений [9–11].

В данной работе исследуется стационарное двухслойное течение жидкости и газо-паровой смеси в бесконечном горизонтальном канале с твердыми непроницаемыми верхней и нижней стенками. Рассматривается случай, когда верхняя твердая граница теплоизолирована, а на нижней стенке и границе раздела задан продольный градиент температуры. Система находится под действием силы тяжести и сопутствующего потока газа.

1. Построение точных решений. Компоненты вектора скорости u и v , давление p' (отклонение от гидростатического), температура T и концентрация пара C удовлетворяют приближению Буссинеска системы уравнений Навье-Стокса и уравнению диффузии [12]:

$$uu_x + vv_y = -\frac{1}{\rho}p'_x + \nu\Delta u; \quad (1)$$

$$uv_x + vv_y = -\frac{1}{\rho}p'_y + \nu\Delta v + g(\beta T + \gamma C); \quad (2)$$

$$u_x + v_y = 0; \quad (3)$$

$$uT_x + vT_y = \chi(\Delta T + \delta(\Delta C)); \quad (4)$$

$$uC_x + vC_y = D(\Delta C + \alpha(\Delta T)). \quad (5)$$

Здесь ρ – относительное значение плотности; ν – коэффициент кинематической вязкости; χ – коэффициент температуропроводности; D – коэффициент диффузии пара в газе; β – коэффициент теплового расширения; γ – концентрационный коэффициент плотности, коэффициенты δ и α характеризуют эффекты Дюфура и Соре в газопаровом слое, вектор силы тяжести g направлен противоположно оси Oy . Отметим, что слагаемые в уравнениях (2) и (4), содержащие функцию концентрации пара, а также уравнение диффузии (5) учитываются только в верхнем слое системы.

Точные решения системы (1)–(5) могут быть определены как аналог решений типа Остроумова – Бириха [1, 2]. Тогда функции u_i , T_i , C , p'_i записываются следующим образом [7, 8]:

$$u_i = \frac{y^4}{24}L_4^i + \frac{y^3}{6}L_3^i + \frac{y^2}{2}c_1^i + yc_2^i + c_3^i;$$

$$T_i = (a_1^i + a_2^i y)x + \vartheta_i, \quad C = (b_1 + b_2 y)x + \varphi;$$

$$p'_i = \left(\frac{y^2}{2}d_3^i + yd_2^i + d_1^i\right)x + \psi_i, \quad (6)$$

где коэффициенты L_j^i выражаются через физические параметры системы, ϑ_i и φ представляют собой полиномы седьмой степени, а ψ_i – полиномы восьмой степени относительно поперечной координаты, c_k^i являются константами интегрирования. Индекс $i = 1, 2$ определяет слой системы: $i = 1$ соответствует жидкой среде, $i = 2$ – газо-паровой смеси.

На границе раздела сред $y = 0$ полагаются выполненными кинематическое (выполняется автоматически) и динамические условия, которые могут быть записаны следующим образом: $\rho_1\nu_1u_{1y} = \rho_2\nu_2u_{2y} + \sigma_T T_x$, $p_1 = p_2$, где σ_T – температурный коэффициент поверхностного натяжения. Скорость и температура на границе $y = 0$ удовлетворяют условиям непрерывности.

Концентрация насыщенного пара удовлетворяет следствию уравнений Менделеева – Клапейрона и Клапейрона – Клаузиуса, записанному в линеаризованной форме [7, 13, 14].

Учитывая диффузионный поток массы испаряющейся жидкости на границе раздела, условие переноса тепла можно записать в следующем виде [7, 8]: $\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} - \delta\kappa_2 \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\lambda M$. Здесь κ_1 и κ_2 – коэффициенты теплопроводности жидкости и газа; λ – теплота испарения; M – массовая скорость испаряющейся с единицы площади поверхности в единицу времени жидкости ($M = const$). Эффект термодиффузии должен учитываться в условии баланса масс на границе раздела [8]: $M = -D\rho_2 \left(\frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0} + \alpha \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=0}\right)$.

На нижней $y = -l$ и верхней $y = h$ твердых границах выполняются условия прилипания для скоростей: $u_1(-l) = 0$, $u_2(h) = 0$.

Температура на нижней стенке канала $y = -l$ распределена линейно относительно продольной координаты $T_1|_{y=-l} = A_1x + \vartheta^-$, где A_1 – продольный градиент температуры на нижней стенке канала, а коэффициент ϑ^- считается известным.

Верхняя граница $y = h$ полагается теплоизолированной: $\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0$. Для концентрации пара выполняется условие следующего вида: $\frac{\partial C}{\partial y} +$

$$\alpha \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0.$$

В верхнем газо-паровом слое расход газа удовлетворяет следующему соотношению:

$$\int_0^h \rho_2 u_2 dy = Q.$$

С учетом приведенных условий можно вычислить неизвестные константы в соотношениях, определяющих искомые функции. В силу условия непрерывности температур на границе $y = 0$

$a_1^1 = a_1^2 = A$. Ввиду условия теплоизолированности границы $y = h$ и точного решения (6) имеем, что $a_2^2 = 0$. В силу этого равенства и условия баланса масс получим, что $b_2 = 0$. Тогда условие переноса тепла влечет равенство нулю параметра a_2^1 , следовательно, продольные градиенты температуры A и A_1 на границе раздела и нижней стенке канала должны полагаться равными.

В ряде случаев вблизи границы раздела жидкости и газа могут наблюдаться возвратные течения. Для функций скорости жидкости и газа, удовлетворяющих условию непрерывности при $y = 0$, выполняется равенство $u_1(y)|_{y=0} = u_2(y)|_{y=0} = U = c_3^1 = c_3^2$. Тогда точка покоя на границе раздела будет определяться равенством нулю констант c_3^i . Исходя из вида функций (6) и граничных условий заметим, что для выполнения равенства $c_3^2 = 0$ необходимо выполнение соотношения $Q = KA$, где K — константа, определяемая физико-химическими параметрами системы, ее размерами и уровнем гравитации.

2. Примеры течений. Рассмотрим течения в различных системах "жидкость – газ" типа "этанол – воздух" и "HFE7100 – азот". Основные физико-химические параметры систем можно найти в работах [8, 15, 16].

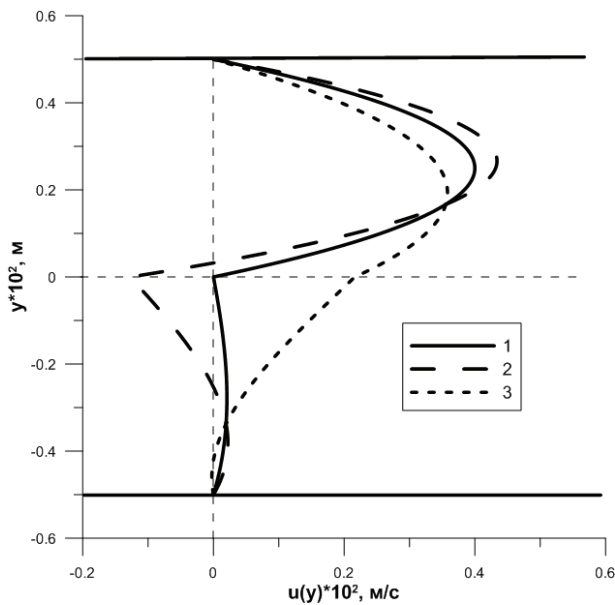


Рис. 1. Профили скорости в системе "этанол – воздух" при различных значениях продольного градиента температуры A , $Q = 1.8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с): 1 – $A = 2.5848$ К/м; 2 – $A = 10$ К/м; 3 – $A = -10$ К/м

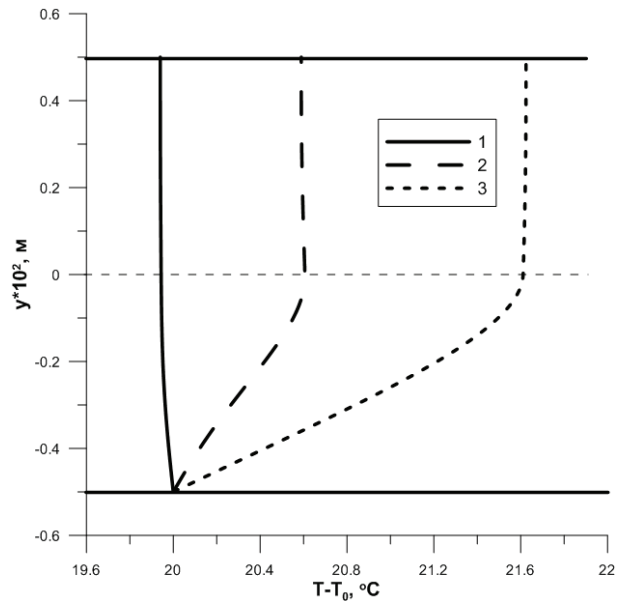


Рис. 2. Профили температуры в системе "этанол – воздух" при различных значениях продольного градиента температуры A , $Q = 1.8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с): 1 – $A = 2.5848$ К/м; 2 – $A = 10$ К/м; 3 – $A = -10$ К/м

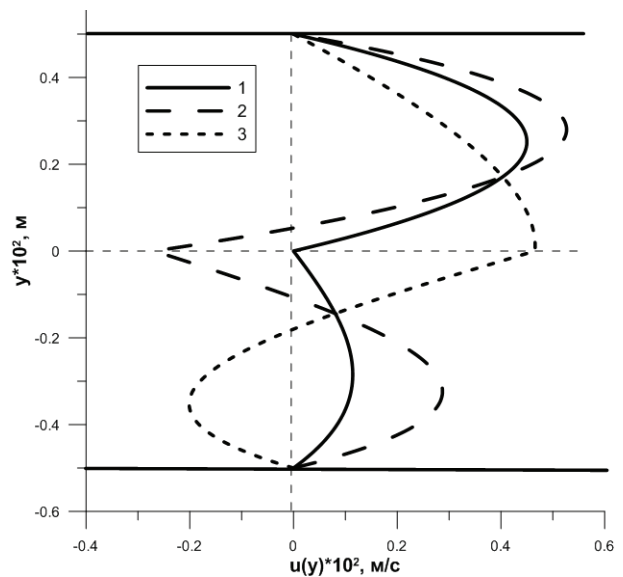


Рис. 3. Профили скорости в системе "HFE7100 – азот" при различных значениях продольного градиента температуры A , $Q = 1.8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с): 1 – $A = 2.6823$ К/м; 2 – $A = 10$ К/м; 3 – $A = -10$ К/м

На рисунках 1 и 2 представлены профили скорости и температуры при различных значениях градиента A и постоянном расходе газа Q , равном $1.8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с). Рисунок 1 иллюстрирует различный характер течений на границе раздела. Коэффициент K для системы "этанол – воздух" равен $6.9638 \cdot 10^{-6}$ кг/(К·с). Тогда отсутствие течения на границе раздела возникает в случае, когда значение продольного градиента достигает 2.5848 К/м. При меньших значениях параметра A скорость U имеет положительные значения, т.е. жидкость вблизи границы $y = 0$ движется сонаправленно с потоком газа, при больших – отрицательные. Отметим также, что изменение значения продольного градиента температуры влечет за собой качественное изменение распределения температуры в системе. При достаточно больших абсолютных значениях A температура газопаровой смеси выше температуры жидкости, тогда как в случае малых абсолютных значений продольного градиента температуры ($A = 2.5848$ К/м) наблюдается противоположный эффект.

В случае, когда нижний слой системы заполнен жидкостью типа HFE7100, а верхний – азотом (см. рисунок 3), коэффициент K имеет значение $6.7106 \cdot 10^{-6}$ кг/(К·с). Для постоянного расхода газа Q эффект отсутствия течения на границе возникает при $A = 2.6823$ К/м. Отметим, что для рассматриваемых случаев при значении продольного градиента температуры $A = -10$ К/м в системе "HFE7100 – азот" наблюдаются довольно сильные возвратные течения в нижней части жидкого слоя, в то время как в этаноле этот эффект выражен слабо.

Заключение. Предложенные в работе точные решения системы уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска описывают испарение жидкости в двухслойных системах находящихсся по действием потока газа. Данные решения позволяют исследовать влияние различных эффектов, таких как продольный градиент температуры и физико-химические характеристики системы, на структуру течения и распределение температуры в канале.

Библиографический список

1. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. — 1966. — № 3.
2. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. — М.; Л., 1952.
3. Пухначев В.В. Нестационарные аналоги решения Бириха // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2011. — № 1/2(69).
4. Goncharova O.N., Kabov O.A., Pukhnachov V.V. Solutions of special type describing the three dimensional thermocapillary flows with an interface // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2012. — Vol. 55, Issue 4.
5. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. — 2013. — № 4.
6. Шлиомис М.И., Якушин В.И. Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Гидродинамика. — 1972. — № 4.
7. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях с испарением на границе раздела // ПМТФ. — 2014. — Т. 55, № 2.
8. Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Люлин Ю.В., Кабов О.А. Моделирование двухслойных течений жидкости и газа с учетом испарения // Теплофизика и аэромеханика.— 2015. — Т. 22, № 5.
9. Резанова Е.В., Шефер И.А. О влиянии тепловой нагрузки на характеристики течения с испарением // СибЖИМ.— 2017. — № 2(70).
10. Bekezhanova V.B. Three-dimensional disturbances of a plane-parallel two-layer flow of a viscous, heat-conducting fluid // Fluid Dynamics. — 2012. — Vol. 47, №6.
11. Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей. — Красноярск, 2010.
12. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. — М., 2008.
13. Пригожин И. Химическая термодинамика. — Новосибирск, 1966.
14. Ghezzehei T.A., Trautz R.C., Finsterle S. et al. Modeling coupled evaporation and seepage in ventilated cavities // Vadose Zone J.— 2004. — Vol. 3, № 3.
15. Равдель А.А., Пономарева А.М. Краткий справочник физико-химических величин. — СПб., 1998.
16. Tuma P.E. Using segregated HFEs as heat transfer fluids — avoiding problems in system design // Chemical Processing. — 2001.