

Математическая модель взаимодействия ледового покрова и гидродинамического диполя в канале**К.А. Шшмарев*

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

A Mathematical Interaction Model between an Ice Cover and a Hydrodynamic Dipole in a Channel*K.A. Shishmarev*

Altai State University (Barnaul, Russia)

Изучаются гидроупругие волны в канале, покрытом льдом, вызванные расположением гидродинамического диполя в жидкости. Рассматривается случай стационарного диполя, расположенного в потоке жидкости с постоянной скоростью, и случай равномерного движения диполя вдоль канала. За основу математической модели взяты дифференциальное уравнение колебаний тонкой вязкоупругой пластины Кельвина-Фойгта и уравнение Лапласа для потенциала скорости течения жидкости под ледовым покровом. Потенциал скорости течения жидкости равен сумме потенциала диполя в канале и потенциала течения, вызванного прогибом пластины. Уравнение потенциала диполя в канале выводится методом зеркальных изображений с учетом четырех стенок. Данные уравнения замыкаются граничными условиями непротекания на стенках и дне канала, условиями жесткого защемления льда на стенках канала, а также кинематическим и динамическим условием на границе раздела лед-жидкость. Динамическое условие описывается линеаризованным интегралом Коши-Лагранжа. Исследуется постановка стационарной задачи. Решение ищется в виде бегущей волны, которое не зависит от времени в системе координат, движущейся вместе с диполем. В случае обтекания диполя жидкостью в канале исследуются траектории движения жидкости и формы обтекания. Полученные формы сравниваются с формами обтекания диполя в неограниченной жидкости.

Ключевые слова: ледовый покров, гидроупругие волны, вязкоупругость, диполь, канал.

DOI 10.14258/izvasu(2017)1-30

Введение. Задачи о колебаниях ледового покрова в результате приложения внешних нагрузок хорошо изучены в случае неограниченной ледовой пластины [1] и для полубесконечного ле-

In this paper, hydroelastic waves generated by a hydrodynamic dipole in a channel covered with ice are studied. The stationary dipole placed in a flow of a liquid with constant speed and the dipole that moves uniformly along the channel are described. A mathematical model is based on the Kelvin-Voigt differential equation of viscoelastic plate and the Laplace equation for a velocity potential under the ice cover. The velocity potential is equal to the sum of the dipole potential in the channel and a potential of the flow caused by the deflection of the plate. The equation for the dipole potential in the channel is obtained by a method of mirror images for four walls. These equations are supplemented by impermeability boundary conditions on the walls and bottom of the channel, clamped boundary conditions of ice on the walls of the channel, and kinematic and dynamic conditions at the ice-liquid interface. The dynamic condition is described by the linearized Cauchy-Lagrange integral. A formulation of the stationary problem is studied. The solution is sought in the form of a traveling wave, which is independent of time in a coordinate system moving with the dipole. Streamlines of the fluid motion and shapes of the flow are studied for the case of flowing around the dipole in the channel. Obtained results are compared with forms of flow in an unbounded fluid.

Key words: Ice sheet, hydroelastic waves, viscoelastic, dipole, channel.

догового покрова [2]. Задачи исследовались в рамках линейной теории гидроупругих волн. Искомые величинами являлись амплитуды прогибов и распределения удлинений в ледовом покрове. Основной целью исследования является определение возможностей разрушения льда внешними

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.

нагрузками. Данная прикладная задача актуальна при добыче нефти и газа на шельфе, когда возникает необходимость эксплуатации длинных погруженных трубопроводов и плавающих емкостей.

Задача о вязкоупругих колебаниях в канале с двумя стенками для локализованной внешней нагрузки исследована в [3,4]. Оценено влияние параметров задачи на амплитуды прогибов и распределение удлинений в ледовом покрове. Задача об упругих колебаниях в канале в рамках модели упругой ледовой пластины, без учета вязкоупругих эффектов, изучена в работах [5, 6]. В работах [7–9] исследована задача о линейных колебаниях жидкости и ограниченного ледового покрова в результате малых колебаний цилиндрического тела, помещенного в жидкость. Решение задачи сведено к определению неизвестного распределения массовых источников по поверхности цилиндра.

Исследование корректности начально-краевых задач снежно-ледового покрова проведено в работах [10–13], корректности задач динамики жидкости без ледового покрова в [14].

Целью данной работы является постановка задачи о линейных колебаниях ледового покрова в результате размещения гидродинамического диполя в жидкости.

Постановка задачи. Рассматривается канал прямоугольного сечения с заданной глубиной H , $(-H \leq z \leq 0)$, и шириной $2L$, $(-L \leq y \leq L)$. Канал является бесконечным в направлении x (x, y, z – декартова система координат). Канал наполнен несжимаемой и невязкой жидкостью с плотностью ρ_l . Жидкость в канале покрыта ледовым покровом с постоянной толщиной h_i и жесткостью $D = Eh_i^3/[12(1 - \nu^2)]$, где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Прогиб ледового покрова $w(x, y, t)$ описывается уравнением колебаний вязкоупругой балки [15]

$$Mw_{tt} + D \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w = p(x, y, 0, t) \quad (1)$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0),$$

где $\tau = \eta/E$ – время релаксации, η – вязкость льда, $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$, $M = \rho_l h_i$ – масса ледового покрова на единицу площади, ρ_l – плотность льда, $p(x, y, 0, t)$ – гидродинамическое давление жидкости на границе лед–жидкость, t – время. Функция прогибов льда $w(x, y, t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$w = 0, \quad w_y = 0 \quad (-\infty < x < \infty, y = \pm L). \quad (2)$$

Гидродинамическое давление на границе лед–жидкость определяется через линеаризованный интеграл Коши-Лагранжа

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_l \varphi_t - \rho_l g w$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L), \quad (3)$$

где g – ускорение свободного падения и $\varphi(x, y, z, t) = \varphi^D(x, y, z, t) + \varphi^E(x, y, z, t)$ – сумма потенциала диполя и потенциала скорости течения жидкости, вызванного прогибом ледовой пластины. Потенциал $\varphi^E(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения жидкости и граничным условиям

$$\begin{aligned} \varphi_z^E = w_t \quad (z = 0), \quad \varphi_y^E = 0 \quad (y = \pm L), \\ \varphi_z^E = 0 \quad (z = -H). \end{aligned} \quad (4)$$

Потенциал $\varphi^D(x, y, z, t)$ удовлетворяет условиям непротекания на всех стенках канала

$$\varphi_z^D = 0 \quad (z = 0, z = -H), \quad \varphi_y^D = 0 \quad (y = \pm L), \quad (5)$$

Потенциал трехмерного диполя $\phi(x, y, z, t)$ в положительном направлении оси x в безграничной жидкости задается формулой

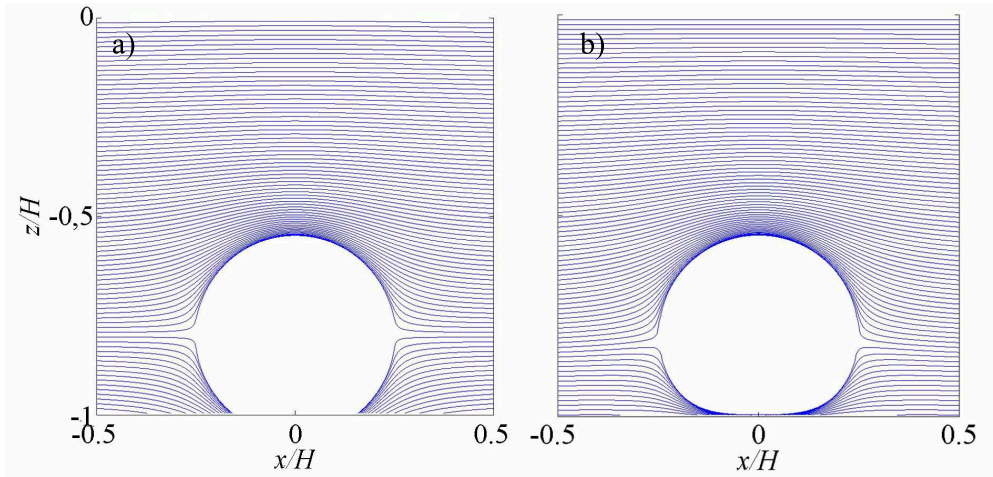
$$\phi(x, y, z, t) = \frac{Ix}{4\pi r^3}, \quad (6)$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$. Параметры диполя x_0, y_0, z_0, I могут быть функциями времени. Потенциал диполя с учетом граничных условий непротекания (5) на границах $y = \pm L, z = -H, z = 0$ может быть получен с использованием метода изображений [16]. Для вывода формулы потенциала диполя $\varphi^D(x, y, z, t)$ с учетом четырех стенок сначала определяется функция ϕ_1 как бесконечная серия отраженных потенциалов от одной пары параллельных стенок $y = \pm L$

$$\begin{aligned} \phi_1(x, x_0, y, y_0, z, z_0, t) = \frac{Ix}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3(x, x_0, y, y_0, z, z_0)} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r^3(x, x_0, y, y_0 + 4nL, z, z_0)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r^3(x, x_0, y, 2L - y_0 + 4(n-1)L, z, z_0)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r^3(x, x_0, y, y_0 - 4nL, z, z_0)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r^3(x, x_0, y, -2L - y_0 - 4(n-1)L, z, z_0)} \right) \right), \end{aligned}$$

затем на основе ϕ_1 аналогичным образом вычисляется потенциал $\varphi^D(x, y, z, t)$ с учетом отражений от пары параллельных стенок $z = -H, z = 0$.

Задача рассматривается в случае диполя, движущегося в жидкости с постоянной скоростью U в направлении оси x , остальные параметры диполя считаются постоянными по времени. Параметр $\tau \partial/\partial t$ в уравнении вязкоупругой пластины (1) описывает эффект демпфирования колебаний



Траектории обтекания стационарного потока жидкости со скоростью 10 м/с двумерного диполя с интенсивностью $I = 1$ для бесконечной жидкости (а), для канала (б), при $z_0 = -9H/10$ м

ледовой пластины и, следовательно, гидроупругие волны затухают в отдалении от движущейся нагрузки, где $|(x - Ut)/L| \rightarrow \infty$.

Запишем задачу (1) – (5) в безразмерных переменных $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

$$\tilde{y} = \frac{y}{L}, \quad \tilde{x} = \frac{x - Ut}{L}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{U}{L}t.$$

Рассматривается установившееся решение в подвижной системе координат

$$w(x, y, t) = w(\tilde{x}L + Ut, L\tilde{y}, t) = w_{sc} \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

$$\varphi^E(x, y, z, t) = \varphi^E(\tilde{x}L + Ut, L\tilde{y}, L\tilde{z}, t) = \varphi_{sc}^E \tilde{\varphi}^E(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

$$\varphi^D(x, y, z, t) = \varphi^D(\tilde{x}L + Ut, L\tilde{y}, L\tilde{z}, t) = I \tilde{\varphi}^D(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

где $w_{sc} = w_{sc} = \varphi_0/(\rho_l g)$, $\varphi_{sc}^E = w_{sc} = (U\varphi_0)/(\rho_l g)$ и I – масштабы прогибов ледовой пластины w , потенциала скорости течения жидкости φ^E и потенциала диполя φ^D соответственно. Определим $\varphi_0 = (\rho_l U I)/L$. Тогда задача (1) – (5) в безразмерных переменных имеет вид (знак тильды опущен)

$$\alpha h Fr^2 w_{xx} + \beta \left(1 - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^4 w + w = h Fr^2 \varphi_x^E + \varphi_x^D \quad (7)$$

$$(-\infty < x < \infty, \quad -1 < y < 1, \quad z = 0),$$

$$w = 0, \quad w_y = 0 \quad (y = \pm 1),$$

$$\nabla^2 \varphi^E = 0,$$

$$(-\infty < x < \infty, \quad -1 < y < 1, \quad -h < z < 0),$$

$$\varphi_z^E = -w_x \quad (z = 0), \quad \varphi_y^E = 0 \quad (y = \pm 1),$$

$$\varphi_z^E = 0 \quad (z = -h),$$

$$\varphi_z^D = 0 \quad (z = 0, z = -h), \quad \varphi_y^D = 0 \quad (y = \pm 1),$$

$$w, \varphi \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty),$$

где $\beta = D/(\rho_l g L^4)$, $\varepsilon = (\tau U)/L$, $\alpha = M/(\rho_l L) = (\rho_i h_i)/(\rho_l L)$ и $Fr = U/\sqrt{gH}$ – число Фруда. Требуется определить w и распределение удлинений

в ледовом покрове при заданных типовых значениях параметров задачи. Функция φ_x^D в правой части уравнения (7) описывает распределение давления на границе лед–жидкость, вызванного движением диполя в канале и определяется, соответственно, вычислением производной по x функции φ^D потенциала трехмерного диполя в канале.

Другой способ описания стационарной задачи – рассмотрение стационарного диполя с постоянной интенсивностью I , помещенного в поток жидкости, текущий с постоянной скоростью U в направлении диполя. Рассмотрим случай бесконечной жидкости. Потенциал скорости диполя (6), помещенного в равномерный поток в положительном направлении x со скоростью течения U в сферической системе координат r, θ и α , где $x = r \cos \theta$, определяется формулой

$$\phi(x, y, z, t) = \left(Ur + \frac{I}{4\pi r^2} \right) \cos \theta. \quad (8)$$

Радиальная скорость V_r потока, заданного в форме (8), вычисляется по формуле

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \left(U - \frac{2I}{4\pi r^3} \right) \cos \theta.$$

Радиальная скорость равна нулю на сфере радиуса R , где

$$R = \left(\frac{I}{2\pi U} \right)^{1/3}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что потенциал скорости (8) описывает поток в безграничной жидкости вокруг сферы радиуса (9). В отдалении от сферы, $r \rightarrow \infty$, поток является равномерным со скоростью U в положительном направлении оси x .

На рисунке приведен пример траекторий движения жидкости. Область формы обтекания зависит от интенсивности диполя I и от скорости течения жидкости U .

Заключение. Рассмотрена математическая модель о стационарных гидроупругих волнах в ледовом покрове канала, вызванных помещенным в жидкость канала диполем. Приведена постановка задачи. Предложены два способа моделирования стационарной задачи – рассмотрение квазистационарной задачи равномерного движения диполя в жидкости с постоянной скоростью в направлении оси x и задачи о колебаниях, вызванных стационарным диполем, помещенным в поток жидкости с постоянной скоростью U . Диполь в канале с учетом 4 стенок моделируется с использованием метода изображений. Получено распре-

деление давления жидкости по ледовой пластине. Проведено сравнение траекторий движения жидкости в канале для плоской задачи при разном расположении диполя. Форма обтекания диполя в канале зависит от интенсивности диполя, скорости течения потока и расположения диполя относительно стенок канала. Смещение диполя к одной из стенок деформирует изначальную форму обтекания сферы.

Автор выражает благодарность А.А. Коробкину, Т.И. Хабахпашевой и А.А. Папину за обсуждение результатов.

Библиографический список

1. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving loads on ice. – Kluwer Academic Publishers, 1996.
2. Brocklehurst P. Hydroelastic waves and their interaction with fixed structures. PhD thesis, University of East Anglia. – UK, 2012.
3. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel. Applied Ocean Research. 2016. № 59. P. 313–326.
4. Шипмарев К.А. Постановка задачи о вязкоупругих колебаниях ледовой пластины в канале в результате движения нагрузки // Известия Алтайского гос ун-та. – 2015. – Вып. 1/2 (85), DOI:10.14258/izvasu(2015)1.2-35
5. Korobkin A., Khabakhpasheva T., Papin A. Waves propagating along a channel with ice cover // European Journal of Mechanics B/Fluids – 2014. – Vol. 47.
6. Batyaev E.A., Khabakhpasheva T.I. Hydroelastic waves in channel with free ice cover. Fluid Dynamics. 2015.6:84–101.
7. Стурова И.В., Ткачева Л.А. Колебания погруженного цилиндрического тела в жидкости при наличии неоднородного ледового покрова // Полярная механика-2016 : материалы Третьей междунар. конф. – Владивосток, 2016. С. 976-985.
8. Sturova I.V., Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya. J. Fluid Mech., 784, – 2015. P. 373-395.
9. Ткачева Л.А. Колебания цилиндрического тела, погруженного в жидкость, при наличии ледяного покрова // ПМТФ. – 2015. – Т. 56, № 6.
10. Ахмерова И.Г., Папин А.А., Токарева М.А. Математические модели механики неоднородных сред. – Барнаул, 2012. – Часть I.
11. Папин А.А. Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 4 (290).
12. Сибин А.Н. Математическая модель деформации мерзлого грунта вблизи термокарстовых озер // Сборник трудов Всерос. молодежной школы-семинара «Анализ, геометрия и топология». – Барнаул, 2013.
13. Папин А.А., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Об одной задаче фильтрации в условиях вечной мерзлоты // Сборник трудов 16 регион. конф. по математике «МАК-2013». – Барнаул, 2013.
14. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по начальным данным системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. – 2000. – № 116.
15. Hydroelasticity in marine technology. – Edited by S. Malenica, N. Vladimir and I. Senjanovic. – VIDICI d.o.o., 2015.
16. Newman J.N. Marine Hydrodynamics. – Cambridge, 1977.