

Численное исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности горной выработки*А.В. Устюжанова, Г.В. Кравченко*

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Numerical Study of Stress-Strain State in the Vicinity of Excavation*A. V. Ustyuzhanova, G. V. Kravchenko*

Altai State University (Barnaul, Russia)

Исследуется напряженно-деформированное состояние в окрестности горной выработки круглого сечения. К однородным горным породам, обладающим достаточной прочностью, возможно применение формул, полученных на основе теории упругости. В рамках плоской деформации рассматривается задача определения полей перемещений и напряжений в прямоугольной области, ослабленной круглым отверстием. Алгоритм численного решения, в основе которого лежит метод конечных элементов, реализован в виде компьютерной программы. Алгоритм построения конечно-элементной сетки позволяет учитывать форму, размеры и расположение отверстия. В процессе численного решения определяются поля перемещений и напряжений. Приведены результаты численных расчетов для отверстий разного диаметра. Исследовано влияние размера отверстия на распределение напряжений в окрестности отверстий. Построены изолинии максимального касательного напряжения, распределение которого применяется для оценки возможности хрупкого разрушения в исследуемой области. Численное моделирование на основе разработанного алгоритма позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние в окрестности горной выработки и прогнозировать возможное пластическое поведение и развитие разрушения материала.

Ключевые слова: горная выработка, напряженно-деформированное состояние, упруго-пластический материал, концентрация напряжений, метод конечных элементов.

DOI 10.14258/izvasu(2017)1-27

Введение. Целью данной работы является численное исследование напряженно-деформированного состояния материала в окрестности горной выработки круглого сечения.

В настоящее время остаются актуальными научные исследования деформационных процессов

A stress-strain state in the vicinity of excavation of the circular cross-section is studied in the paper. Formulas derived from the elasticity theory can be applied to the homogeneous rock formations of sufficient strength. The problem of determination of the displacement and stress fields is considered in the rectangular region with the circular hole. A numerical solution algorithm based on the finite element method is elaborated. The algorithm of constructing of a finite element mesh allows to take into account the shape, size and hole location. Fields of the displacements and stress are determined. Results of numerical calculations for holes of different diameters are presented. The influence of a hole size on the stress distribution in the vicinity of holes is presented. Isolines of the maximal tangential stress are constructed. The maximal tangential stress distribution is used to estimate the possibility of brittle fracture in the test region. Numerical modeling based on the constructed algorithm allows one to investigate the stress-strain state in the vicinity of excavation and to predict the possible plastic behavior and development of a material failure.

Key words: excavation, stress-strain state, elastic-plastic material, stress concentration, finite element method.

в окрестности горных выработок [1–8]. Анализ напряженно-деформированного состояния и оценка прочности породного материала имеет важное практическое значение при изучении механизмов разрушения и обеспечения надежности и безопасности сооружений.

Напряженное состояние породного массива в окрестности выработок зависит от разных факторов, в том числе от формы выработок и механических свойств окружающей среды. В массивах горных пород наблюдаются геологические нарушения, естественная трещиноватость, а также могут возникнуть и технологические трещины. Поэтому при изучении процессов деформирования, протекающих в горных породах, необходимо учитывать и возможное возникновение пластических областей, и развитие сдвиговых деформаций, а также упрочнение и разупрочнение материала.

При описании модели массива горных пород используются разные подходы. К однородным горным породам, обладающим достаточной прочностью, возможно применение формул, полученных для упругой среды [1, 2]. Для определения неупругого состояния, возникающего вблизи контура выработки, применяется упруго-пластическая модель [4, 8]. В работе [5] моделирование напряженного состояния горного массива рассмотрено с учетом внутренней структуры и разупрочнения.

В данной работе задача определения напряженно-деформированного состояния в окрестности горной выработки рассмотрена в условиях плоской деформации. В качестве исследуемой области выбрано нормальное к продольной оси выработки вертикальное сечение в виде прямоугольника с отверстием.

Изучению концентрации напряжений вблизи отверстий посвящено большое количество научных работ, в которых развиваются как аналитические, так и вычислительные методы [9–12]. Известные аналитические решения задачи о напряженном состоянии упругих и упруго-пластических материалов в рамках классических моделей представлены в монографиях [13–15].

Постановка задачи. В качестве модели массива горных пород в данной работе рассматривается упругая среда. Исследуемая прямоугольная область расположена вдоль координатных осей x_1 и x_2 . Постановку и решение задачи будем проводить для величин в безразмерном виде. В качестве характерного линейного размера выбран горизонтальный размер прямоугольника. Вертикальный размер прямоугольника, отнесенный к горизонтальному, равен H . Отверстие представляет собой круг радиуса a и с центром в точке с координатами (x_0, y_0) .

Требуется найти поля перемещений u_i ($i = 1, 2$) и напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2$), удовлетворяющих уравнениям равновесия:

$$\sigma_{ij,j} = 0.$$

Деформации ε_{ij} ($i = 1, 2$) записываются через вектор перемещений u_i с текущим радиусом

вектором x_i ($i = 1, 2$):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Вне отверстия материал является упругим, поэтому компоненты деформаций связаны с напряжениями с помощью закона Гука [14]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G} + (1 - 2\nu)\delta_{ij}\frac{\sigma}{E},$$

где ν – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости, G – модуль сдвига, σ – среднее давление, s_{ij} – девиатор тензора напряжений:

$$\sigma = \frac{\sigma_{mm}}{3}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma, \quad (m = 1, 2, 3).$$

Запишем граничные условия, обеспечивающие сжатие области:

$$\sigma_{11}(0, x_2) = \alpha\sigma_0; \quad \sigma_{11}(1, x_2) = -\alpha\sigma_0;$$

$$u_2(x_1, 0) = 0; \quad \sigma_{22}(x_1, H) = -\sigma_0.$$

Отверстие считается свободным от напряжений, т.е. на его границе $\sigma_{12} = 0$. В качестве характерного напряжения выбрано значение $10^{-2}E$.

Аналитическое решение, полученное в случае бесконечной упругой полуплоскости, ослабленной круглым отверстием (задача Кирша), А.Н. Динник предложил использовать и для горных выработок [1]. Согласно его теории считается, что на бесконечном удалении от отверстия выполняются условия

$$\sigma_{22} = \gamma h, \quad \sigma_{11} = \frac{\nu}{1 - \nu}\gamma h,$$

где $\gamma = \rho g$, ρ – плотность материала, g – ускорение свободного падения; h – глубина, на которой расположена выработка. Тогда аналитическое решение имеет вид:

$$\sigma_r = \frac{\gamma h}{2(1 - \nu)} \frac{r^2 - a^2}{r^2} - \frac{\gamma h(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta), \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\gamma h}{2(1 - \nu)} \frac{r^2 + a^2}{r^2} + \frac{\gamma h(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta), \quad (2)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\gamma h(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin(2\theta), \quad (3)$$

где r, θ – полярные координаты, которые связаны с декартовыми координатами точки на плоскости, исходя из геометрии рассматриваемой задачи, формулами $x_1 = x_0 + r \cos \theta$, $x_2 = y_0 + r \sin \theta$.

Здесь σ_r – нормальное радиальное напряжение, σ_θ – нормальное напряжение в окружном направлении, $\sigma_{r\theta}$ – касательное напряжение.

Напряжения σ_{ij} ($i, j = 1, 2$) определяются через напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$ по следующим соотношениям:

$$\sigma_{11} = \sigma_r \cos^2 \theta - \sigma_{r\theta} \sin(2\theta) + \sigma_\theta \sin^2 \theta,$$

$$\sigma_{22} = \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_{r\theta} \sin(2\theta) + \sigma_\theta \cos^2 \theta,$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \sin(2\theta) + \sigma_{r\theta} \cos(2\theta).$$

Численное решение. Для получения численного решения поставленной задачи применяется метод конечных элементов [16, 17], на основе которого разработана и реализована компьютерная программа. Расчетная область разбивается на треугольные конечные элементы. Построенная сетка конечных элементов корректируется при наличии отверстия в области. Реализуемый в программе алгоритм позволяет учитывать форму, размеры и расположение отверстия.

Целью проведения вычислительных расчетов являлось исследование влияния постепенного увеличения размеров отверстия на напряженно-деформированное состояние в упругой области при одинаковых условиях на границах.

Численные расчеты получены при следующих значениях параметров: $\nu = 0.2, \sigma_0 = 0.5, \alpha = 0.25, H = 1.015, x_0 = 0.5, y_0 = 0.495$.

На рисунках 1–2 построены изолинии максимального касательного напряжения

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$

в окрестности круглых отверстий различных радиусов.

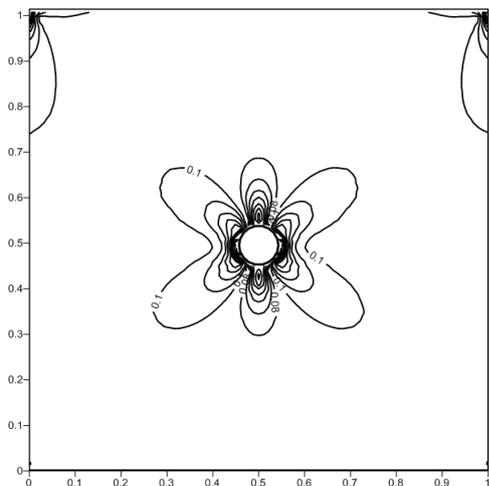


Рис. 1. Изолинии τ_{max} ($a = 0.043$)

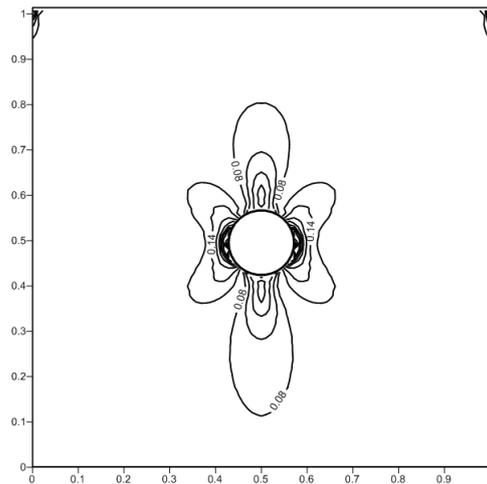


Рис. 2. Изолинии τ_{max} ($a = 0.071$)

Картина распределения напряжений в зависимости от размера отверстий меняется. Возникновение трещин в окрестности отверстия при разрушении возможно в точках наибольшего значения максимального касательного напряжения, а именно в точках с координатами $x_1 = x_0 \pm a, x_2 = y_0$. С увеличением радиуса отверстия зона концентрации напряжений возле этих точек, а значит, и прогнозируемая область разрушения, растет.

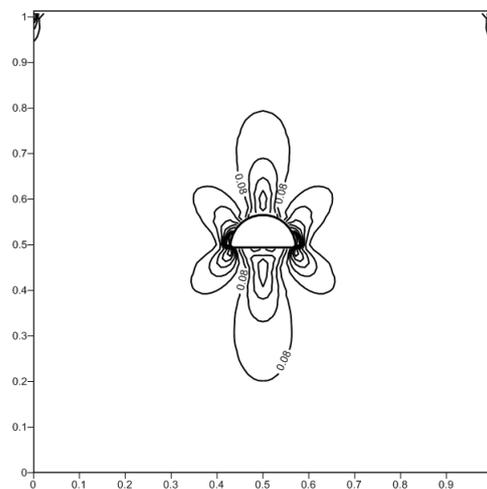


Рис. 3. Изолинии τ_{max} (радиус полукруга $a = 0.071$)

Численные расчеты проведены также и в окрестности отверстий в виде полукруга разных размеров. На рисунке 3 построены изолинии τ_{max} в случае радиуса полукруга $a = 0.071$. Картина распределения напряжений имеет аналогичный характер, что и для круглых отверстий. Наибольшая концентрация напряжений наблюдается в крайних точках горизонтальной границы отверстия.

Результаты численных расчетов согласуются с аналитическим решением (1)–(3), а также с экспериментальными данными, представленными в работе [18].

Заключение. Численное моделирование на основе разработанного алгоритма позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние в окрестности горной выработки и прогнозировать возможное пластическое поведение и развитие разрушения материала.

Библиографический список

1. Борисов А.А. Механика горных пород и массивов. — М., 1980.
2. Шемякин Е.И. Механика горного массива // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2006. — №3.
3. Оловянный А.Г. Механика горных пород. Моделирование разрушений. — СПб., 2012.
4. Протосеня А.Г., Карасев М.А., Беляков Н.А. Упруго-пластическая задача для выработок различных форм поперечных сечений при условии предельного равновесия Кулона // ФТПРПИ. — 2016. — №1.
5. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф., Казанцев А.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния массива горных пород с учетом внутренней структуры и разрушения // Актуальные проблемы современного машиностроения : сборник трудов Междунар. науч.-практ. конф. — Томск, 2014.
6. Черданцев Н.В., Черданцев С.В. Исследование состояния массива горных пород в окрестности выработки, пройденной вблизи геологического нарушения // Вестник Кузбасского гос. техн. ун-та. — 2015. — № 5.
7. Бодин В.В., Лилин Я.И. Оценка напряженно-деформированного состояния породного массива в окрестности тектонических нарушений с использованием динамических параметров сейсмических волн // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2011. — №2.
8. Бушманова О.П., Устюжанова А.В. Численное исследование напряженного состояния в окрестности системы горных выработок // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2011. — №1/1(69).
9. Бушманова О.П., Устюжанова А.В. Численное исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности системы отверстий и сдвиговых трещин // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2012. — №1/1(73).
10. Мокряков В.В. Применение метода мультипольного разложения для расчета напряженного состояния в бесконечной упругой плоскости, содержащей несколько круговых отверстий // Вычислительная механика сплошных сред. — 2012. — Т 5, №2.
11. Yang Z., Kim C., Cho C.-B., Beom H.G. The concentration of stress and strain in finite thickness elastic plate containing a circular hole // International Journal of Solids and Structures. — 2008. — №45.
12. Mohammadi M., Dryden J.R., Jiang L. Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate // International Journal of Solids and Structures. — 2011. — №48.
13. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. — Киев, 1968.
14. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М., 1975.
15. Соколовский В.В. Теория пластичности. — М., 1969.
16. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М., 1975.
17. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. — М., 1979.
18. Гольдштейн Р.В., Кулинич Ю.В., Осипенко Н.М. Разрушение горных пород вблизи отверстия при сжатии. — Препринт. — №778. — М., 2005.