УДК 51:556.124

Разрешимость модельной задачи сублимации льда в снежном покрове*

А.А. Папин, Е.С. Юст

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Solvability of a Model Problem of Sublimation of Ice in Snow

A.A. Papin, E.S. Yust

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается математическая модель движения воды и воздуха в снеге с учетом сублимации. Снег представляет собой пористую среду, твердый каркас которой составляют неподвижные частицы льда. В порах находятся вода, воздух и пар. Для описания процесса используются уравнения сохранения масс для каждой фазы, система уравнений двухфазной фильтрации Маскета-Леверетта для воды и воздуха, а также уравнение сохранения энергии для снега. Дается постановка задачи, далее строится ее решение в автомодельных переменных. Задача рассматривается в бесконечной области. Для поля скоростей получены конечные формулы, а также уравнение для температуры, из которого следует монотонность последней с экспоненциальным стремлением к заданному значению на бесконечности. Найдено вырождающееся на решении уравнение для насыщенности водной фазы и установлен физический принцип максимума. На основе этого принципа и с помощью введения дополнительного параметра установлена разрешимость задачи Коши. Полученное решение продолжается сначала на конечный интервал, а затем, благодаря свойству конечной скорости распространения возмущения, решение продолжается на бесконечный интервал.

Ключевые слова: сублимация, двухфазная фильтрация, автомодельное решение, фазовый переход.

In this paper, a mathematical model of water and air motion in snow with consideration of a sublimation process is investigated. Snow is a porous medium with a solid frame of fixed ice particles. There are water, air, and steam in pores. The model utilizes a mass conservation equation for each phase, the Musket-Leverette equation system for water and air two-phase filtration, and the energy conservation equation for snow. The model is elaborated in Paragraph 1. Paragraph 2 presents the problem solution in self-similar variables. The problem is investigated in an infinite domain. Finite solutions are obtained for a field of velocities. The equation for temperature is presented, and monotony of the equation with an exponential approach to the target value at infinity is demonstrated. Also, the degenerate equation for water phase saturation and physical background for the maximum principle are provided. Solvability of the Cauchy problem is proved on the basis of this principle with an introduction of an additional parameter. The resulting solution is, firstly, expanded on a finite interval, and, later, on an infinite interval due to finite speed of disturbance propagation.

Key words: sublimation, two-phase filtration, Darcy's law, self-similar solution, phase transition.

DOI 10.14258/izvasu(2017)1-23

Постановка задачи. При построении математической модели снежного покрова в период снеготаяния используются общие принципы динамики многофазной среды [1–4]. Особенностью этих моделей является обязательный учет фазовых переходов и использование фильтрационного приближения, поэтому основными уравнениями модели являются законы сохранения масс и энергии, а также закон Дарси для подвижных фаз [5–7]. Данный подход применяется при исследовании тепловой двухфазной фильтрации [8, 9], а также в работах по тепломассопереносу в промерзающих и протаивающих грунтах [10–15]. Значительные объемы снега испаряются и при отрицательных температурах, минуя жидкую фазу. Для моделирования процесса сублима-

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.

ции льда в снеге используется следующая система уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi s_1\rho_1^0) + div(\rho_1^0\phi s_1\vec{u}_1) = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi s_2\rho_2^0) + div(\rho_2^0\phi s_2\vec{u}_2) = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_3^0(1-\phi)) = I_{43}, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi s_4\rho_4^0) = I_{34}, \qquad (4)$$

$$\begin{gathered}\vec{v}_i = -K_0\tfrac{k_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i + \rho_i^0\vec{g}), \quad i = 1, 2,\\ p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \quad s_1 + s_2 + s_4 = 1,\end{gathered} \qquad (5)$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{4}\rho_i^0 c_i\alpha_i\Big)\frac{\partial\theta}{\partial t} + \Big(\sum_{i=1}^{2}\rho_i^0 c_i\vec{v}_i\Big)\nabla\theta = = div(\lambda_c\nabla\theta) - \mu\frac{\partial\rho_3^0\phi}{\partial t}. \qquad (6)$$

Здесь t – время; ϕ – пористость; $\vec{u}_i$ – истинные скорости фаз; $\rho_i^0, \vec{v}_i = \phi s_i\vec{u}_i$ – соответственно, истинные плотности воды, воздуха, льда, пара и скорости фильтрации воды и воздуха, s_1, s_2, s_4 – насыщенности воды, воздуха и пара; ρ_i – приведенная плотность, α_i – концентрация, $\rho_i = \alpha_i\rho_i^0$ ($\alpha_i = \phi s_i$, $i = 1, 2, 4$, $\alpha_3 = 1 - \phi$); I_{ij} – интенсивность перехода массы из i-ой в j-ю составляющую в единице объема и в единицу времени; K_0 – тензор фильтрации; k_{0i} – относительные фазовые проницаемости ($k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0$, $k_{0i}\big|_{s_i=0} = 0$); μ_i – коэффициенты динамической вязкости; p_i – давления фаз; p_c – капиллярное давление; $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести; θ – температура среды ($\theta_i = \theta$, $i = 1, 2, 3, 4$); $c_i = const > 0$ – теплоемкость i-й фазы при постоянном давлении; $\mu = const > 0$ – удельная теплота сублимации льда; λ_c – коэффициент теплопроводности снега.

Система замыкается гипотезами: $I_{34} = I_{34}(\theta)$, $I_{12} = I_{32} = I_{31} = I_{24} = I_{14} = 0$, $\vec{u}_3 = \vec{u}_4 = 0$, $\phi = \phi(\theta)$, $s_4 = s_4(\theta)$.

Простое решение. Следуя [7], от системы (1) – (6) переходим к задаче:

$$-c\frac{d}{d\xi}(\phi s_1\rho_1^0 + \rho_3^0(1-\phi) + \phi s_4\rho_4^0) + \frac{d}{d\xi}(\rho_1^0 v_1) = 0, \qquad (7)$$

$$-c\frac{d}{d\xi}(\phi s_2\rho_2^0) + \frac{d}{d\xi}(\rho_2^0 v_2) = 0, \qquad (8)$$

$$\begin{gathered}v_i = -K_0\tfrac{k_{0i}}{\mu_i}(\tfrac{dp_i}{d\xi} - \rho_i^0 g),\\ p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \quad s_1 + s_2 + s_4 = 1,\end{gathered} \qquad (9)$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{4}\rho_i^0 c_i(v_i - c\alpha_i)\Big)\frac{d\theta}{d\xi} - c\mu\frac{d\rho_3^0\phi}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\Big(\lambda_c\frac{d\theta}{d\xi}\Big), \qquad (10)$$

$$\begin{gathered}s_1\big|_{\xi\to-\infty} = 0, \quad s_4\big|_{\xi\to-\infty} = 0, \quad \theta\big|_{\xi\to-\infty} = \theta^-,\\ \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\Big|_{\xi\to-\infty} = 0, \quad v_i\big|_{\xi\to-\infty} = 0,\end{gathered} \qquad (11)$$

$$\begin{gathered}p_2(0) = p^+, \quad s_1(0) = s_1^+, \quad s_4(0) = s_4^+,\\ \theta(0) = \theta^+, \quad v_i(0) = v_i^+, \quad i = 1, 2.\end{gathered} \qquad (12)$$

Определение скоростей фильтрации. Следуя [7], получим представления для скоростей фильтрации:

$$\begin{gathered}v_1 = c\phi s_1 + c\tfrac{\rho_3^0}{\rho_1^0}(\phi^- - \phi) + c\tfrac{\rho_4^0}{\rho_1^0}\phi s_4,\\ v_2 = c\phi s_2 - c\phi^-.\end{gathered} \qquad (13)$$

Представление для температуры. Фиксируем конечные значения температуры θ^-, θ_1 и θ^+. Пусть $0 < \theta^- < \theta_1 < \theta^+$,
$\phi_1 \equiv (1-\phi^-)/(\theta^+ - \theta_1)$, $\phi_2 \equiv \alpha_4^*/(\theta^+ - \theta_1)$. Положим для всех $\theta \in (0, \infty)$:

$$\phi(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \geq \theta^+,\\ \phi^- + \phi_1(\theta - \theta_1), & \theta_1 \leq \theta \leq \theta^+,\\ \phi^-, & \theta \leq \theta_1.\end{cases}$$

$$\phi(\theta)s_4(\theta) = \begin{cases} \alpha_4^*, & \theta \geq \theta^+,\\ \phi_2(\theta - \theta_1), & \theta_1 \leq \theta \leq \theta^+,\\ 0, & \theta \leq \theta_1.\end{cases}$$

Из (13) имеем

$$\sum_{i=1}^{4} c_i\rho_i^0(v_i - c\alpha_i) = c\rho_3^0(1-\phi)(c_1 - c_3) + c\rho_4^0\phi s_4(c_1 - c_4) + + A_1c_1 + A_2c_2.$$

Используя условия (11), получим

$$\lambda_c\frac{d\theta}{d\xi} = c(c_1 - c_3)\rho_3^0 M(\theta) + c(c_1 - c_4)\rho_4^0 N(\theta) + +(A_1c_1 + A_2c_2)(\theta - \theta^-) - \mu\rho_3^0(\phi - \phi^-) \equiv f_1(\theta), \qquad (14)$$

где коэффициенты правой части определяются в [7].

Решение задачи (11), (12), (14) можно представить в виде ($\lambda_c > 0$)

$$\begin{gathered}I(\theta) \equiv \int_{\theta}^{\theta^+}\frac{dy}{f_1(y)} = \int_{\xi}^{0}\frac{dy}{\lambda_c(y)} \equiv \psi(\lambda_c(\xi)),\\ \theta(\xi) = I^{-1}(\psi(\lambda_c(\xi))).\end{gathered} \qquad (15)$$

Если $\theta \in [\theta_1, \theta^+]$, то из (15) имеем

$$I(\theta) = \int_{\theta}^{\theta^+}\frac{dy}{b_1(y-\theta_1)^2 + d_1(y-\theta_1) + a_1} = \psi(\lambda_c(\xi)). \qquad (16)$$

Ввиду монотонности $\theta(\xi)$ существует такая точка ξ_1 , что $\theta(\xi_1) = \theta_1$.

При $\theta \in [\theta^-, \theta_1]$ из (15) имеем:

$$\theta(\xi) = \theta^- + (\theta_1 - \theta^-) \exp\left(-b_2 \int\limits_{\xi}^{\xi_1} \frac{dy}{\lambda_c(y)}\right). \quad (17)$$

Таким образом, при заданной функции $\lambda_c(s_1, \theta)$ представление (15) и его частные случаи (16), (17) определяют температуру для всех $\xi \in (-\infty, 0)$.

Определение насыщенности и давлений. Используя уравнение для температуры (14) и следуя [7], уравнение для насыщенности представим в следующем виде:

$$a_0(s_1)\tfrac{ds_1}{d\xi} = \varphi_1\varphi_2\gamma(s_1)\tfrac{p_0'}{p_0}\tfrac{f_1}{\lambda_c} + \tfrac{1}{p_0}\overline{g}\varphi_1\varphi_2 + \tfrac{1}{p_0}|c|\phi A s_1 - \\ -\tfrac{1}{p_0}|c|B(\phi-\phi^-) + \tfrac{1}{p_0}|c|D\phi s_4 \equiv f_2(s_1,\theta), \quad (18)$$

где

$$a_0 = -\varphi_1\varphi_2\gamma', \quad \overline{g} = g(\rho_1^0 - \rho_2^0), \quad p_0' = \frac{dp_0}{d\theta},$$

$$\overline{\mu}_i = \frac{\mu_i}{K_0\overline{k}_{0i}}, \quad i = 1, 2,$$

$$A = \overline{\mu}_1\varphi_2 + \overline{\mu}_2\varphi_1, \quad B = \overline{\mu}_1\varphi_2\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} + \overline{\mu}_2\varphi_1,$$

$$D = \overline{\mu}_1\varphi_2\frac{\rho_4^0}{\rho_1^0} + \overline{\mu}_2\varphi_1,$$

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & s_i \le 0, \\ s_i^{n_i}, & 0 \le s_i \le 1, \\ 1, & s_i \ge 1. \end{cases}$$

Уравнение (18) рассматривается при $\xi < 0$ и условии $s_1(0) = s_1^+$, т.е. для $s_1(\xi)$ рассматривается задача Коши, а условие $s_1\big|_{\xi=-\infty} = 0$ должно быть обосновано. Функции f_1, ϕ, s_4 зависят от температуры $\theta(\xi) \in [\theta^-, \theta^+]$, выполняется условие $s_4 < (\frac{\overline{\mu}_1}{\overline{\mu}_2})^{1/n_1}$. Относительно $p_0(\theta(\xi))$ постулируется существование постоянной $\nu_0(\theta^-, \theta^+) > 0$ такой, что $\nu_0 \le p_0 \le \nu_0^{-1}$, $|p_0'| \le \nu_0$. Функции $\overline{\mu}_1$ и $\overline{\mu}_2$ могут зависеть от $s_1(\xi)$ и $\theta(\xi)$, но должны удовлетворять неравенствам $0 < \nu_i \le \overline{\mu}_i \le \nu_i^{-1} < \infty$, $i = 1, 2$.

Следующее утверждение уточняет свойства функций A, B и D.

Лемма 1. Если $n_1 > 1$, $n_2 > 1$, $\alpha > 0$ и $\delta > 1 - \alpha^{1/n_2}$, то $\min(\delta^{n_2}, \alpha - (1-\delta)^{n_2}, g_\mu) \le$

$$\le g(x) \equiv \alpha x^{n_1} + (\delta - x)^{n_2} \le \max(\delta^{n_2}, \alpha - (1-\delta)^{n_2}),$$

где $g_\mu = \alpha\delta^\mu(1+\beta)^{-n_1/\mu} + \beta^{n_2}\delta(1+\beta)^{-n_2}$ при $\mu \le 1$, $g_\mu = \alpha\delta(1+\beta)^{-n_1} + \beta^{n_2}\delta^\mu(1+\beta)^{-n_2\mu}$ при $\mu \ge 1$, $\mu = (n_1-1)/(n_2-1)$, $\beta = (n_1\alpha/n_2)^{1/(n_2-1)}$. Доказательство приводится в [7].

Следуя [8], получим

$$p(\xi) = p^+ - p_0(\theta^+)b(s_1^+) - \int\limits_{\xi}^{0} f_3(s_1(x), \theta(x))dx,$$
$$p_2(\xi) = p(\xi) + p_0(\theta)b(s_1),$$
$$p_1(\xi) = p_2(\xi) - p_c(s_1(\xi), \theta(\xi)), \quad (19)$$

где

$$p(\xi) \equiv p_2(\xi) - p_0(\theta)b(s_1), b(s_1) = \int\limits_0^{s_1} \frac{\varphi_1(y)\gamma'(y)}{\varphi_1(y) + \varphi_2(y)}dy.$$

Здесь $\varphi_1 + \varphi_2 > 0$ в силу леммы 1, а правая часть равенства есть заданная функция $s_1(\xi)$ и $\theta(\xi)$. Поэтому функция p_1 определяется с точностью до произвольной постоянной, значение которой можно определить из условия $p_2(0) = p^+$. Гладкость p_1 и p_2 определяется гладкостью $s_1(\xi)$.

Определение. Слабым решением задачи (7) – (12) в области $R^- = (-\infty, 0)$ называются функции $\theta(\xi)$, $s_1(\xi)$, $v_i(\xi)$, $p_i(\xi)$ и параметр c, если:
1) $\theta(\xi)$ имеет непрерывную производную, удовлетворяет уравнению (14) и условиям $\theta(0) = \theta^+$, $\theta\big|_{\xi\to-\infty} = \theta^-$, $\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\big|_{\xi\to-\infty} = 0$;
2) $s(\xi)$ имеет непрерывную производную с весом $a(s)$, удовлетворяет уравнению (18) и условиям $s_1(0) = s_1^+$, $s_1\big|_{\xi\to-\infty} = 0$;
3) $v_i(\xi)$ удовлетворяют равенствам (13) и условиям $v_i(0) = v_i^+$, $v_i\big|_{\xi\to-\infty} = 0$;
4) $p_i(\xi)$ удовлетворяют равенствам (19) и условию $p_2(0) = p_2^+$.

Теорема. Пусть положительные числа a_c, b_c, μ, ϕ^-, K_0, θ^-, θ_1, θ^+, ρ_i^0, c_i, α_4^*, $(i = 1,2,3,4)$, $s_1^+ \in (0,1]$ и непрерывные по $s_1 \in [0,1]$ и $\theta \in [\theta^-, \theta^+]$ функции $\phi(\theta)$, $s_4(\theta)$, $k_{0i} = \overline{k}_{0i}(s_1,\theta)s_i^{n_i}$, $n_i > 1$, $\mu_i(s_1,\theta)$, $(i = 1,2)$, $p_c(s_1,\theta) = p_0(\theta)\gamma(s_1)$, $\lambda_c = a_c + b_c\rho_c^2$,
$\rho_c = \rho_1^0 s_1\phi + \rho_2^0 s_2\phi + \rho_3^0(1-\phi) + \rho_4^0 s_4\phi$ удовлетворяют следующим условиям:

1. $\rho_2^0 < \rho_4^0 < \rho_3^0 < \rho_1^0, \quad c_4 < c_3 < c_1 < c_2,$
   $\alpha_4^* < \frac{\rho_3^0(c_1-c_3)}{\rho_4^0(c_1-c_4)}(1-\phi^-)$;
2. $s_4(\theta) < (\frac{\overline{\mu}_1}{\overline{\mu}_2})^{1/n_2}$;
3. $0 < (a = -k_{01}k_{02}\frac{d\gamma}{ds_1}, k_{01}, k_{02})$ при $s_1 \in (0,1)$,
   $a\big|_{s_1=0,1} = k_{01}\big|_{s_1=0} = k_{02}\big|_{s_1=1} = 0$,
   $\frac{1}{s_1}k_{01}k_{02}\gamma\big|_{s_1=0} = 0, \quad \frac{d\gamma}{ds_1} < 0$,
   $a_0 \ge \nu_0(s_1(1-s_1))^\kappa, \quad \kappa > 1, \quad \frac{a_0(s_1)}{s_1}\big|_{s_1=0} = 0$,
   $(||\frac{d\gamma}{ds_1}||_{C[0,1]}, \quad ||\frac{dp_0}{d\theta}||_{C[\theta^-,\theta^+]}) \le \nu_0$, $0 < \nu_0^{-1} <$
   $< (\mu_i(s_1,\theta), \overline{k}_{0i}(s_1,\theta), p_0(\theta), \left|\frac{d\gamma(s_1)}{ds_1}\right|) \le \nu_0$.

Тогда существует по крайней мере одно слабое решение задачи (7) – (12), обладающее свойствами

$$0 \le s_1(\xi) \le 1, \quad \theta^- \le \theta(\xi) \le \theta^+,$$

$$c = \frac{(1+\lambda)v_2^+}{(1-\phi^-)(1-\rho_3^0/\rho_1^0)} < 0.$$

Кроме того, существует точка $\xi_* \in (-\infty, \xi_1]$ такая, что $s_1(\xi) = 0$ для всех $\xi \leq \xi_*$. Теорема доказывается аналогично [7].

Заключение. В работе получены следующие результаты: установлен физический принцип максимума для насыщенности, монотонность температуры и свойств конечной скорости распространения возмущений, доказана теорема существования автомодельного решения. В дальнейшем предполагается учесть сжимаемость среды [16–18].

Библиографический список

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Часть 1. – М., 1987.

2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Часть 2. – М., 1987.

3. Трофимова Е.Б. Математическая модель снежного покрова как многофазной среды // Труды IV всесоюзн. гидролог. съезда. – 1976. – Т. 6.

4. Коробкин А.А., Папин А.А., Хабахпашева Т.И. Математические модели снежно-ледового покрова. – Барнаул, 2013.

5. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико-математические модели. – М., 1983.

6. Цыпкин Г.Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. – М., 2009.

7. Юст Е.С. Модельная задача тепломассопереноса в тающем снеге с учетом сублимации // Материалы Междунар. школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае–2015». – Барнаул, – 2015.

8. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. – Барнаул, 2009.

9. Ахмерова И.Г., Папин А.А., Токарева М.А. Математические модели механики неоднородных сред. – Барнаул, – 2012.

10. Папин А.А. Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, №4.

11. Сибин А.Н. Математическая модель деформации мерзлого грунта вблизи термокарстовых озер // Анализ, геометрия и топология : труды Всерос. молодежн. школы-семинара. – Барнаул, – 2013.

12. Сибин А.Н. Численное решение двумерной задачи суффозионного выноса грунта // Молодежь Барнаула. Материалы XVI научно-практ. конф. молодых ученых. – Барнаул, – 2014.

13. Шишмарев К.А. Математические вопросы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2015. – № 1/1 (85). DOI:10.14258/izvasu(2015)1.1-22

14. Шишмарев К.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Труды молодых ученых Алтайского государственного университета. – 2011. – № 8.

15. Токарева М.А. Двумерная задачи фильтрации в тонком пороупругом слое // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2013. – № 1/1 (77).

16. Жумагулов Б.Т., Монахов В.Н. Гидродинамика нефтедобычи. – Алматы, 2001.

17. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. – 1998. – Vol. 11.

18. Tokareva M.A. Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic medium // Журнал Сибирского федерального ун-та. Серия: Математика и физика. – 2015. – Т. 8, № 4.