УДК 517.91

О разрешимости «в целом» начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение магмы*

А.А. Папин, М.А. Токарева

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On the Solvability of the Initial Boundary Value Problem for a System of Equations Describing the Motion of Magma

A.A. Papin, M.A. Tokareva

Altai State University (Barnaul, Russia)

Исследовано математическое обоснование одной модели движения вязкой жидкости в пороупругой среде. Рассматриваемая система уравнений является обобщением классических моделей фильтрации, в которой пористость является заданной функцией. Учет сжимаемости пористой среды является принципиальным моментом. В основе рассматриваемой модели лежат уравнения сохранения массы жидкости и пористого скелета, закон Дарси для жидкости, учитывающий движение пористого скелета, реологическое уравнение для пористости и условие равновесия «системы в целом». Приводится краткий обзор основных результатов по рассматриваемой проблеме. Далее дана постановка задачи одномерного движения магмы в переменных Эйлера. Переход в переменные Лагранжа позволяет свести исходную систему к одному уравнению третьего порядка неклассического типа. Установлена локальная теорема существования гладкого решения начально-краевой задачи при модельных зависимостях коэффициента фильтрации и коэффициента упругости скелета от пористости, а также доказана глобальная разрешимость задачи. При доказательстве основную роль играют глобальные априорные оценки, причем центральными из них являются оценки строгой положительности и ограниченности пористости.

Ключевые слова: фильтрация, пороупругость, магма, закон Дарси, глобальная разрешимость.

The study deals with the mathematical justification of a filtration model for a viscous fluid in a poroelastic medium. The system of equations under consideration is a generalization of classical filtration models with porosity being a given function. The consideration of porous medium compressibility is a matter of principle. The basis of this model includes fluid mass conservation equations, the porous skeleton, Darcy's law for a fluid with consideration of the porous skeleton movement, the rheological equation for porosity, and the system equilibrium condition. Paragraph 1 provides a brief overview of the main results. In paragraph 2, we state in Euler variables the problem of one-dimensional motion of magma. The transition to Lagrange variables allows us to reduce the original system to a single non-classical equation of the third order. In paragraph 3, the local theorem on the existence of a smooth solution of the initial-boundary value problem with the model dependence of filtration rate and shear viscosity coefficients on porosity is established. Also, the global solvability of the problem is proved. Global a priori estimates play the crucial role in proving the theorem with the estimates of strict positivity and limited porosity being the key features.

Key words: filtration, poroelasticity, magma, Darcy law, global solvability.

DOI 10.14258/izvasu(2017)1-22

Введение. Интерес к задачам фильтрации в пористых средах возникает, в частности, с широким применением данных моделей в области нефтегазодобычи [1], движения грунтовых вод и связанных с ними проблемами загрязнения [2]. Первым достижением в этом направлении была введенная Терцаги концепция эффективного напряжения для одномерной модели пористой деформации [3]. В дальнейшем теория Терцаги была развита Био [4], практически одновременно и независимо близкая теория изучалась Френкелем [5]. Позднее аналогичные модели бы-

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.

ли предложены в работах Николаевского, Золотарева и Рахматуллина [6, 7, 8]. Следует отметить, что в случае двухфазного движения несмешивающихся несжимаемых жидкостей в недеформируемой пористой среде математическая теория процесса построена в работах [9]. Вопросам обоснования начально-краевых задач двухфазной фильтрации в недеформируемой пористой среде также посвящены работы [10, 11, 12]. В работе [13] пористость зависела от давления (но деформация пористого скелета не рассматривалась). В исследовании [14] предложена модель двухфазной фильтрации в деформируемой пористой среде, в которой движение твердого скелета описывалось на основе аналога принципа Терцаги и модифицированного линейного закона Гука. Вопросы обоснования в этой работе не рассматривались. Это было сделано в [15, 16], где были построены частные решения. Близкие по структуре системы уравнений рассматривались в [17, 18, 19]. В [17] установлена локальная разрешимость задачи Коши в пространствах С.Л. Соболева. В [18, 19] исследованы решения типа «простой волны». В [20] установлено свойство конечной скорости распространения возмущений в случае преобладания упругих свойств твердого скелета. Двумерная задача была рассмотрена в [21]. Подобная модель исследовалась в [22] в случае двухфазной пороупругой фильтрации.

Постановка задачи. В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа [23]–[24]:

$$\frac{\partial \rho_f\phi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_f\phi v_f)=0,\qquad \frac{\partial\rho_s(1-\phi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_s(1-\phi)v_s)=0, \tag{1}$$

$$\phi(v_f-v_s)=-k(\phi)\left(\frac{\partial p_f}{\partial x}-\rho_f g\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x}=-\frac{p_e}{\xi(\phi)},\qquad p_e=p_{tot}-p_f,\quad p_{tot}=(1-\phi)p_s+\phi p_f, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=-\rho_{tot}g,\quad \rho_{tot}=(1-\phi)\rho_s+\phi\rho_f, \tag{4}$$

решаемая в области $(x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=(0,1)$, при краевых и начальных условиях

$$v_s\mid_{x=0,x=1}=v_f\mid_{x=0,x=1}=0,\qquad \phi\mid_{t=0}=\phi^0(x),\quad p_{tot}\mid_{x=0}=p^0(t). \tag{5}$$

Здесь $\rho_f,\rho_s,v_f,v_s,p_f,p_s$ – соответственно, плотности, скорости и давления жидкой и твердой фаз; ϕ – пористость, p_e – эффективное давление, p_{tot} – общее давление, ρ_{tot} – общая плотность; g – плотность массовых сил, $k(\phi)$ – коэффициент фильтрации, $\xi(\phi)$ – коэффициент объемной вязкости (заданные функции). Задача записана в эйлеровых координатах (x,t). Истинные плотности фаз принимаются постоянными. Искомыми являются величины ϕ,v_s,v_f,p_f,p_s. При исследовании задачи (1)–(4) удобно использовать переменные Лагранжа [9, стр. 47]. В новых безразмерных переменных система примет вид

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+(1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}(\phi(v_f-v_s))=0, \tag{6}$$

$$\phi(v_f-v_s)=-k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x}-\rho_f g), \tag{7}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=-\rho_{tot}g, \tag{8}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x}=-a_1(\phi)p_e. \tag{9}$$

Далее рассмотрим следующие зависимости: $k(\phi)=\phi, a_1(\phi)=\phi$. Таким образом, система (6)–(9) приводится к одному уравнению для функции ϕ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi((1-\phi)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}ln\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)\right)-g(\rho_{tot}+\rho_f))\right). \tag{10}$$

Следует отметить, что близкие уравнения рассматривались во многих работах, например в [25, с. 158]. Особенностью (10) является необходимость доказательства физического принципа максимума для пористости $\phi\in(0,1)$. В дальнейшем также вместо ϕ удобно ввести функции $s=\frac{\phi}{1-\phi}, s^0=\frac{\phi^0}{1-\phi^0}$. Полагая $z=\frac{\partial(lns)}{\partial t}$, приходим к следующей задаче для z,s:

$$z=\frac{\partial(lns)}{\partial t},\ s|_{t=0}=s^0(x),\qquad \frac{z}{d(s)}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(s)\frac{\partial z}{\partial x}-b(x,t,s)\right)=0,\qquad \left(a\frac{\partial z}{\partial x}-b\right)\mid_{x=0,x=1}=0, \tag{11}$$

где $d(s)=\frac{1}{s}, a(s)=\frac{s}{(1+s)^2}, b(x,t,s)=\frac{s}{1+s}g(\frac{s}{1+s}(\rho_f-\rho_s)+(\rho_s+\rho_f))$. Локальная классическая разрешимость задачи (11) легко устанавливается с помощью теоремы Банаха и следует алгоритму из [26]. Принцип максимума для ϕ при малых значениях $t\in[0,t_0]$ следует из представления $lns(x,t)=lns^0(x)+\int_0^t z(x,t)d\tau$. Итак, при $\phi^0\in C^{2+\alpha}(\bar\Omega_T)$, $0<m_0\le\phi^0\le m_0<1$, на промежутке $[0,t_0]$ существует и единственно решение задачи (1)-(5) $s(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q_{t_0}), z(x,t)\in C^{2+\alpha}(\Omega)$ причем, $0<\phi(x,t)<1$. Получим глобальные априорные оценки решения (s,z), не зависящие от величины t_0. После этого локальное решение можно продолжить на весь отрезок $[0,T]$.

Глобальная разрешимость. Решением задачи (1)–(5) называется совокупность функций $\phi, v_s, v_f \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T), p_f, p_s \in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$, таких, что $0 < \phi < 1$. Эти функции удовлетворяют уравнениям (1)–(4) и начальным и граничным условиям (5) как непрерывные в $\bar{Q}_T$ функции.

Теорема. Пусть данные задачи (1)–(5) подчиняются следующим условиям: функция g, начальная функция ϕ^0, граничная функция p^0 удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$g \in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T),$$

$$\phi^0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), p^0(t) \in C^{1+\alpha}[0,T],$$

а также функция ϕ^0 удовлетворяет неравенству

$$0 < m_0 \le \phi^0(x) \le M_0 < 1, \quad x \in \bar{\Omega},$$

где m_0, M_0 – известные положительные константы. Тогда для всех $t \in [0,T]$, $T < \infty$ существует единственное решение задачи (1)–(5), причем существуют числа $0 < m_1 < M_1 < 1$ такие, что $m_1 \le \phi(x,t) \le M_1$, $(x,t) \in Q_T$.

Поскольку на промежутке $[0, t_0]$ существует решение задачи (1)–(5), причем $0 < \phi(x,t) < 1$, $x \in \Omega$, $t \in [0,t_0]$. После получения необходимых априорных оценок, не зависящих от величины t_0, локальное решение можно продолжить на весь отрезок $[0,T]$. Из (10), (11) имеем

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{s}{1+s}\left(\frac{1}{1+s}\frac{\partial^2(lns)}{\partial x \partial t} - \bar{g}(\phi(s))\right)\right) = 0, \tag{12}$$

$$s|_{t=0} = s^0, \ \ (\frac{s}{1+s}(\frac{1}{1+s}\frac{\partial^2(lns)}{\partial x \partial t} - \bar{g}(\phi(s)))|_{x=0,1} = 0 \tag{13}$$

где $\bar{g}(s) = g(\frac{1}{1+s}\rho_s + \frac{1+2s}{1+s}\rho_f)$.
Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $s(x,t)$ – решение задачи (12)–(13). Тогда существует такая точка $a(t) \in [0,1]$, что $s(a(t),t)dx = S \equiv \int\limits_0^1 s^0(x)dx$.

Доказательство полностью следует [9].

Лемма 2. Пусть $s(x,t)$ – решение задачи (12)–(13). Тогда $0 < A \le s \le B < \infty$, где $A = \frac{m_0}{1-m_0}e^{-\sqrt{C}}$, $B = \frac{M_0}{1-M_0}e^{\sqrt{C}}$, C – постоянная, зависящая только от данных задачи и независящая от t_0.

Доказательство. Пусть функция $\psi(s)$ такая, что $\frac{d^2\psi(s)}{ds^2} = (\frac{1}{s}+1)^2$. Умножив уравнение (12) на $\frac{d\psi(s)}{ds}$ и проинтегрировав по x от 0 до 1, получим интегральное равенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 (\psi(s) + \frac{1}{2}(lns)_x^2)dx = \int\limits_0^1 \bar{g}(1+s)(lns)_x dx.$$

Откуда имеем оценку

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 (\psi(s) + \frac{1}{2}(lns)_x^2)dx \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 ((lns)_x)^2 dx + \int\limits_0^1 (\bar{g}(1+s))^2 dx\right).$$

Из определения $\psi(s)$ следует, что

$$\psi = \frac{s^2}{2} + (2s-1)lns + s(c_1 - 2) + c_2.$$

Выбирая $c_1 = 3, c_2 = 3/2$, получим, что

$$\psi = \frac{(s+1)^2}{2} + (2s-1)lns + 1 \ge \frac{(1+s)^2}{2},$$

поскольку $(2s-1)lns + 1 > 0$ для любого $s > 0$. Учитывая свойства ψ, получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 (\psi(s) + (lns)_x^2)dx \le C\int\limits_0^1 (\psi(s) + (lns)_x^2)dx,$$

где C – постоянная, зависящая от данных задачи и не зависящая от t_0. Из неравенства Гронуолла получаем $\int\limits_0^1 (lns)_x^2 dx \le C$. Поскольку $|lns - lnS| = |\int\limits_{a(t)}^x \frac{s_x}{s}dx| \le |\int\limits_0^1 \frac{s_x}{s}dx| \le C$, то $e^{-C} \le \frac{s}{S} \le e^C$, и, следовательно, $0 < \frac{A}{1+A} \le \phi \le \frac{B}{1+B} < 1$. Лемма 2 доказана. Поскольку уравнение (12) ввиду леммы 2 становится равномерно эллиптическим для всех $t \in [0,T]$, то, используя теорию эллиптических уравнений [27], получаем, что $z \in C^{2+\alpha}(\Omega)$. Гладкость функции z по переменной t определяется гладкостью функции $g(x,t)$. Теорема доказана.

Замечание. Решение задачи (1)-(5) в рассматриваемом случае можно получить в более широком классе. А именно: $s_x, s_t, (lns)_{xxt} \in L_2(Q_T)$. Для доказательства используется известная процедура [25, с. 48]: начальную функцию s^0 приблизим функцией s^0_ε такой, что $s^0_\varepsilon \to s^0$ при $\varepsilon \to 0$ в $W_2^1(0,1)$. Возникают последовательности $(s_\varepsilon, z_\varepsilon)$, удовлетворяющие задаче (11). Для решений этих задач справедливы леммы 1, 2 и следующие оценки:

$$\int_0^1 (s_{\varepsilon x}^2 + s_{\varepsilon t}^2 + z_\varepsilon^2 + z_{\varepsilon x}^2 + z_{\varepsilon xx}^2 + z_{\varepsilon xt}^2)dx \le c(1 + \int_0^1 |s_x^0|^2)$$

равномерно по ε. Из этой оценки следует, что $s_\varepsilon \to s, z_\varepsilon \to z, z_{\varepsilon x} \to z_x$ сильно в L_2, а $z_{\varepsilon xx} \to z_{xx}$ слабо в L_2. Предельные функциии будут удовлетворять системе (11) почти всюду.

Заключение. В работе доказана глобальная разрешимость начально-краевой задачи одномерного движения магмы в пороупругой среде.

Библиографический список

1. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. — 1998. — Vol. 11.

2. Fowler A. Mathematical Geoscience // Interdisciplinary Applied Mathematics. — 2011. — 36.

3. Terzaghi K. Die Berechnung der DurchlaËssigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen, Sitzungsber. Akad. Wis. Wien, Math. Nat. Klasse, Abt. IIa. — 1923. — Vol. 132.

4. Biot M. A. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. — 1941. — Vol. 12.

5. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. Акад. наук СССР. — 1944. — Т. VIII, №. 4.

6. Николаевский В.Н. О распространении продольных волн в насыщенных жидкостью упругих пористых средах // Инженерный журнал. — 1963. — Т. III, вып. 2.

7. Золотарев П.П. Распространение звуковых волн в насыщенной газом пористой среде с жестким скелетом // Инженерный журнал. — 1964. — Т. IV.

8. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. — 1956. — Т. XX.

9. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск, 1983.

10. Алексеев Г.В., Хуснутдинова Н.В. О разрешимости первой краевой задачи и задачи коши для уравнения одномерной фильтрации двухфазной жидкости // Докл. АН СССР. — 1972 — Т. 202, № 2.

11. Доманский А.В. О некоторых краевых задачах фильтрации несмешивающихся жидкостей // Математические модели фильтрации и их приложения : сб. науч. тр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики. — 1999.

12. Кружков С.Н., Сукорянский С.М. Краевые задачи для систем уравнений типа двухфазной фильтрации; постановка задач, вопросы разрешимости, обоснование приближенных методов // Матем. сб. — 1977. — Т. 104(146), № 1(9).

13. Бочаров О.Б. О фильтрации двух несмешивающихся жидкостей в сжимаемом пласте // Динамика сплошной среды / СО АН СССР, Ин-т гидродинамики. — 1981. — Вып. 50.

14. Vedernikov V.V., Nikolaevskii V.N. Mechanics equations for porous medium saturated by a two-phase liquid // Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza. — 1978. — № 5.

15. Бочаров О.Б., Рудяк В.Я., Серяков А.В. Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2014. — № 2.

16. Rudyak V.Ya., Bocharov O.B., Seryakov A.V. Hierarchical sequence of models and deformation peculiarities of porous media saturated with fluids // Proceedings of the XLI Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics (APM-2013). July 1-6; St-Petersburg. 2013.

17. Simpson M., Spiegelman M., Weinstein M.I. Degenerate dispersive equations arising in the stady of magma dynamics // Nonlinearity. — 2007. — Vol. 20.

18. Abourabia A.M., Hassan K.M., Morad A.M. Analytical solutions of the magma equations for rocks in a grnular matrix // Chaos Solutions Fract. — 2009. — Vol. 42.

19. Geng Y., Zhang L. Bifurcations of traveling wave solutions for the magma equation // Applied Mathematics and computation. — 2010. — Vol. 217.

20. Tokareva M.A. Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic medium // Журнал Сибирского федерального ун-та. Серия: Математика и физика. — 2015. — Т. 8, № 4.

21. Токарева М.А. Двумерная задача фильтрации в тонком пороупругом слое // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2013. — № 1-1 (77).

22. Папин А.А., Сибин А.Н. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2016. — № 1 (89). DOI:10.14258/izvasu(2016)1-27

23. Morency C., Huismans R.S., Beaumont C., Fullsack P. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Research. — 2007. — Vol. 112.

24. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. — New York Elsevier, 1972.

25. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. — Новосибирск, 1983.

26. Ахмерова И.Г., Папин А.А., Токарева М.А. Математические модели механики неоднородных сред. Часть 1. — Барнаул, 2012.

27. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М., 1973.