УДК 512.572

О солитонах Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях*

Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, И.В. Эрнст

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Ricci Solitons on 2-symmetric Lorentzian Manifolds

D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov, I.V. Ernst

Altai State University (Barnaul, Russia)

Важным обобщением эйнштейновых метрик на (псевдо)римановых многообразиях являются солитоны Риччи, которые впервые были рассмотрены Р. Гамильтоном. Задача нахождения солитонов Риччи является достаточно сложной, поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на размерность, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на класс векторных полей, участвующих в записи уравнения солитона Риччи. Одним из важных примеров такого рода ограничений являются многообразия Уокера, то есть псевдоримановы многообразия, допускающие гладкое параллельное (в смысле связности Леви-Чивита) распределение изотропных векторов. Геометрия многообразий Уокера, а также солитоны Риччи на них исследовались в работах многих математиков. В исследовании рассмотрено уравнение солитона Риччи на некоторых лоренцевых многообразиях Уокера. К числу таких многообразий относятся 2-симметрические лоренцевы многообразия, которые были исследованы Д.В. Алексеевским, А.С. Галаевым. Позднее К. Онда и В. Батат исследовали солитоны Риччи на четырехмерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях и доказали локальную разрешимость уравнения солитона Риччи на таких многообразиях. В данной работе доказана локальная разрешимость уравнения солитона Риччи на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях.

Ключевые слова: солитоны Риччи, многообразия Уокера, лоренцевы многообразия.

DOI 10.14258/izvasu(2017)1-20

Ricci solitons are an important generalization of Einstein metrics on (pseudo) Riemannian manifolds, and this notion was introduced by R.Hamilton. The problem of solving the Ricci soliton equation is quite difficult, therefore one can assume some restrictions either on a structure of the manifold or on the dimension or on a class of metrics, or on a class of vector fields, which are contained in the Ricci soliton equation. Walker manifolds are one of the most important examples of such restrictions, that is pseudo-Riemannian manifolds admitting a smooth parallel (in sense of Levi-Civita connection) isotropic distribution. The geometry of Walker manifolds and Ricci solitons on them were studied by many mathematicians. In this paper, we investigate the Ricci soliton equation on some Lorentzian manifolds. In particular, we study the Ricci solitons on 2-symmetric Lorentzian manifolds, which are Walker manifolds, as it was proven by D.V. Alekseevsky and A.S. Galaev. K. Onda and B. Batat investigated Ricci solitons on four-dimensional 2-symmetric Lorentzian manifolds, and proved local solvability of the Ricci soliton equation on such manifolds. In this paper we have obtained local solvability of the Ricci soliton equation on five-dimensional 2-symmetric Lorentzian manifolds.

Key words: Ricci soliton, Walker manifold, Lorentzian manifold.

Введение. Уравнение солитона Риччи является обобщением уравнения Эйнштейна, и впервые данный термин был введен Р. Гамильтоном в работе [1, с. 237]. Позднее солитоны Риччи исследовались в работах многих математиков (см., например, обзор [2]). В общем случае задача исследования и классификации солитонов Риччи является достаточно сложной, и поэтому она рассматривается при некоторых ограничениях на многообразие. К числу многообразий с такими ограничениями относятся 2-симметрические ло-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: №16–01–00336А, №16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

ренцевы многообразия, которые были исследованы Д.В. Алексеевским и А.С. Галаевым. Позднее К. Онда и В. Батат исследовали солитоны Риччи на четырехмерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях и доказали локальную разрешимость уравнения солитона Риччи на таких многообразиях (см. [3, с. 561]). В данной работе доказана локальная разрешимость уравнения солитона Риччи на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях.

Основные определения. *Псевдоримановым многообразием* называется гладкое многообразие $\mathcal{M}$, на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g. Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n-1)$, то $(\mathcal{M}, g)$ называется *лоренцевым многообразием.*

Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – псевдориманово многообразие размерности n, ∇ – соответствующая связность Леви-Чивита. Тензор кривизны опеределим как $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ и тензор Риччи как $r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X,V)Y)$, где X, Y, Z, V – гладкие векторные поля на $\mathcal{M}$.

Определение. Полное псевдориманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется солитоном Риччи, если существует гладкое векторное поле $\mathcal{X}$, удовлетворяющее уравнению

$$\pounds_{\mathcal{X}} g + r = \lambda g, \tag{1}$$

где r – тензор Риччи, $\lambda \in \mathrm{R}$ – некоторая константа, $\pounds_{\mathcal{X}} g$ – производная Ли метрики g в направлении поля $\mathcal{X}$.

Число λ называется константой солитона. При $\lambda > 0, \lambda = 0$ или $\lambda < 0$ солитон называют сжимающимся, стабильным или расширяющимся соответственно.

Определение. Гладкое распределение $\mathcal{D}$ на $\mathcal{M}$ называется *параллельным*, если для любых векторных полей $X \in \mathcal{D}$, $Y \in \mathcal{TM}$ имеем $\nabla_Y X \in \mathcal{D}$.

Определение. Псевдориманово многообразие, допускающее гладкое параллельное распределение изотропных векторов, называется *многообразием Уокера* (см. [4, с. 1196; 5, с. 69])

Определение. Пусть R – тензор кривизны метрики g. Если

$$\nabla R \neq 0, \nabla^2 R = 0,$$

то $(\mathcal{M}, g)$ называется *2-симметрическим псевдоримановым многообразием.*

Система координат. Уравнение солитона Риччи. Рассмотрим лоренцево локально неразложимое 2-симметрическое многообразие Уокера $(\mathcal{M}, g)$ размерности 5. Следующая теорема А.С. Галаева и Д.В. Алексеевского позволяет выбрать систему локальных координат на $\mathcal{M}$.

Теорема (см. [6, стр. 2331])**.** *Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – локально неразложимое лоренцево многообразие Уокера размерности $n+2$. Тогда $(\mathcal{M}, g)$ является 2-симметрическим тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $v, x^1, \ldots, x^n, u$ такие, что*

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 + (H_{ij}u + F_{ij})x^i x^j (du)^2, \tag{2}$$

где H_{ij} – ненулевая диагональная вещественная матрица с диагональными элементами; $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, F_{ij} – симметричная вещественная матрица.

Получаем локальную систему координат (v, x, y, z, u) на многообразии $\mathcal{M}$. Пусть в этих координатах векторное поле $\mathcal{X}$ имеет вид $\mathcal{X} = (V, X, Y, Z, U)$, где V, X, Y, Z, U – гладкие функции на $\mathcal{M}$. Запишем уравнение солитона Риччи в системе координат (v, x, y, z, u):

$$\left\{\begin{array}{rcl}
2U_v & = & 0 \\
U_x + X_v & = & 0 \\
U_y + Y_v & = & 0 \\
U_z + Z_v & = & 0 \\
U_u + V_v & = & \lambda \\
2X_x & = & \lambda \\
Y_x + X_y & = & 0 \\
Z_x + X_z & = & 0 \\
U_x H + X_u + V_x & = & 0 \\
2Y_y & = & \lambda \\
Z_y + Y_z & = & 0 \\
U_y H + Y_u + V_y & = & 0 \\
2Z_z & = & \lambda \\
U_z H + Z_u + V_z & = & 0 \\
xU_u H + 2V_u + XH_x + YH_y + & & \\
+ZH_z + UH_u - \frac{1}{2}(H_{xx} + H_{yy} + H_{zz}) & = & \lambda H
\end{array}\right. \tag{3}$$

Разрешимость уравнения солитона Риччи.

Теорема. *Уравнение солитона Риччи (1) локально разрешимо в классе 2-симметрических лоренцевых многообразий размерности 5 для любой константы λ.*

Схема доказательства:

Задача сводится к доказательству разрешимости системы уравнений (3) для любой константы λ.

Продифференцировав уравнения (3.6)-(3.8) по x, получим

$$X_{xx} = Y_{xx} = Z_{xx} = 0.$$

Аналогично из уравнений (3.1)-(3.8), (3.10)-(3.12) получим следующее:

$$X_{yy} = Y_{yy} = Z_{yy} = 0,$$
$$X_{zz} = Y_{zz} = Z_{zz} = 0,$$
$$X_{vv} = Y_{vv} = Z_{vv} = 0,$$
$$U_{vv} = U_{xx} = U_{yy} = U_{zz} = 0.$$

Отсюда следует, что функции X, Y, Z, U являются многочленами от переменных v, x, y, z, коэффициенты которых зависят от u, причем степени этих многочленов по каждой переменной не превосходят 1. Этим мы будем существенно пользоваться. Введем обозначения $x_1 = v, x_2 = x, x_3 = y, x_4 = z, x_5 = u$. Тогда мы можем записать:

$$X(v,x,y,z,u) =$$
$$= \sum_{i,j} X_{ij}(u)x_i x_j + \sum_i X_i(u)x_i + X_0(u),$$
$$i = 1..4, j = 1..4,$$

где $X_{ij}(u) = X_{ji}(u)$, $X_{ii} = 0$. Аналогичная запись справедлива для функций Y, Z, U. Уравнения (3.1), (3.6), (3.10), (3.13) сводятся к следующим равенствам:

$$U_{1i} = U_{i1} = U_1 = 0,$$
$$X_{2i} = X_{i2} = Y_{3i} = Y_{i3} = Z_{4i} = Z_{i4} = 0,$$
$$X_2 = Y_3 = Z_4 = \frac{\lambda}{2}.$$

При выполнении этих равенств уравнения (3.1), (3.6), (3.10), (3.13) обнуляются. Далее мы полагаем, что не найденные ранее U_i, X_i, Y_i, Z_i равны 0. Это сужает класс решений, но значительно облегчает доказательство. После подстановки полученных выражений в систему (3) уравнения (3.2)-(3.4), (3.7),(3.8),(3.11) примут следующий вид:

$$yU_{23} + zU_{24} + yX_{13} + zX_{14} = 0,$$
$$xU_{23} + zU_{34} + xY_{12} + zY_{14} = 0,$$
$$xU_{24} + yU_{34} + xZ_{12} + yZ_{13} = 0,$$
$$vY_{12} + zY_{24} + vX_{13} + zX_{34} = 0,$$
$$vZ_{12} + yZ_{23} + vX_{14} + yX_{34} = 0,$$
$$vZ_{13} + xZ_{23} + vY_{14} + xY_{24} = 0.$$

Эти равенства выполнены при всех v, x, y, z. Откуда следует, что

$$U_{23} + X_{13} = 0, U_{23} + Y_{12} = 0, Y_{12} + X_{13} = 0.$$

Разрешая эту систему, получим $U_{23} = X_{13} = Y_{12} = 0$. Аналогично получаются равенства

$$U_{24} = U_{34} = X_{14} = X_{34} = Y_{14} = Y_{24} = 0,$$
$$Z_{12} = Z_{13} = Z_{23} = 0.$$

Если они выполнены, то обнуляются уравнения (3.1)-(3.4), (3.6)-(3.8), (3.10),(3.11), (3.13).

Уравнение (3.5) примет вид

$$V_v = \lambda.$$

Интегрируя по v, получим

$$V = \lambda v + V_1(x,y,z,u).$$

Подставим это выражение в уравнения (3.9),(3.12),(3.14),(3.15):

$$(V_1)_x = (V_1)_y = (V_1)_z = 0,$$
$$H_{11}u + H_{22}u + H_{33}u + F_{11} + F_{22} + F_{33} = 2(V_1)_u,$$

откуда

$$V = \lambda v + \frac{u^2}{4}(H_{11} + H_{22} + H_{33}) + $$
$$+ \frac{u}{2}(F_{11} + F_{22} + F_{33}) + V_0, V_0 \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, все уравнения системы (3) выполнены и теорема доказана.

Полученное векторное поле $\mathcal{X}$ имеет координаты

$$\mathcal{X} = (V, X, Y, Z, U),$$
$$V = \lambda v + \frac{u^2}{4}(H_{11} + H_{22} + H_{33}) +$$
$$+\frac{u}{2}(F_{11} + F_{22} + F_{33}) + V_0,$$
$$X = \frac{\lambda x}{2}, Y = \frac{\lambda y}{2},$$
$$Z = \frac{\lambda z}{2}, U = 0.$$

Заключение. В результате проведенных исследований доказана локальная разрешимость уравнения солитона Риччи на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях. Данные результаты продолжают исследования К. Онды и В. Батата по существованию солитонов Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях.

Библиографический список

1. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. – 1988. – Vol. 71.

2. Cao H.-D. Recent progress on Ricci solitons // Advanced Lectures in Mathematics. – 2010. – Vol. 11.

3. Onda K., Batat W. Ricci and Yamabe solitons on second-order symmetric, and plane wave 4-dimensional Lorentzian manifolds // Journal of Geometry. – 2014. – Vol. 105. – Issue 3.

4. Brozos-Vazquez M., Garcia-Rio E., Gavino-Fernandez S. Locally conformally flat lorentzian gradient Ricci soliton // Journal of Geometric Analysis. – 2013. – Vol. 23, № 3.

5. Walker A.G. Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes // Quart. J. Math. Oxford. – 1950. – Vol. 1, № 2.

6. Alekseevsky D.V., Galaev A.S. Two-symmetric Lorentzian manifolds // Journal of Geometry and Physics. – 2011. – Vol. 61, № 12.