УДК 512.81

Об операторе секционной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой*

С.В. Клепикова, О.П. Хромова
Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On the Sectional Curvature Operator of Three-Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Lorentzian Metrics

S.V. Klepikova, O.P. Khromova
Altai State University (Barnaul, Russia)

Изучение свойств операторов кривизны представляет интерес в понимании геометрического и топологического строения однородного (псевдо)риманова многообразия. В однородном случае хорошо известны результаты Дж. Милнора, В.Н. Берестовского, Е.Д. Родионова, В.В. Славского о связи между кривизной Риччи, одномерной кривизной и топологией однородного риманова пространства.

Дж. Милнор исследовал кривизны левоинвариантных римановых метрик на группах Ли. Задача о предписанных значениях оператора Риччи на трехмерных римановых локально-однородных пространствах и трехмерных метрических группах Ли была решена О. Ковальским и С. Никшевич. Аналогичные результаты для операторов одномерной и секционной кривизны были получены Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, О.П. Хромовой.

В случае левоинвариантных лоренцевых метрик на группах Ли ситуация представляется менее очевидной. В случае левоинвариантных лоренцевых метрик на трехмерных группах Ли известна работа Дж. Кальварузо, О. Ковальского, в которой исследуется задача о существовании группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и заданными значениями спектра оператора Риччи.

В данной работе решена задача о предписанных значениях оператора секционной кривизны на трехмерных метрических группах Ли.

Ключевые слова: алгебры Ли, группы Ли, левоинвариантные лоренцевы метрики, операторы кривизны, спектр.

The study of curvature operator properties is interesting for understanding of geometrical and topological structure of a homogeneous (pseudo)Riemannian manifold. Some results of J. Milnor, V.N. Berestovskii, E.D. Rodionov, V.V. Slavskii on the connection between the Ricci curvature, one-dimensional curvature and topology of the homogeneous Riemannian space are well known in the homogeneous case.

J. Milnor investigated the curvatures of left-invariant Riemannian metrics on Lie groups. The problem of prescribed values of the Ricci operator on three-dimensional Riemannian locally homogeneous spaces and three-dimensional metric Lie groups was solved by O. Kowalski and S. Nikcevic. Similar results were obtained by D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov, O.P. Khromova for the one-dimensional curvature operator and the sectional curvature operator.

The situation is less clear in the case of left-invariant Lorentzian metrics on Lie groups. The problem of existence of a Lie group with left-invariant Lorentzian metrics and prescribed values of Ricci operator spectrum for left-invariant Lorentzian metrics on three-dimensional Lie groups is studied in the paper of G. Calvaruso and O. Kowalski.

In this paper, we consider the problem of prescribed values for the operator of the sectional curvature on three-dimensional metric Lie groups.

Key words: Lie algebras, Lie groups, left-invariant Lorentzian metrics, curvature operators, spectrum.

DOI 10.14258/izvasu(2017)1-17

Введение, постановка задачи. Задачи о восстановлении (псевдо)риманова многообразия по предписанному спектру оператора кривизны являются актуальным направлением в исследова-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: №16–01–00336А, №16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

нии операторов кривизны. Римановы локально-однородные пространства с предписанными значениями спектра оператора Риччи были определены О. Ковальским и С. Никшевич в [1]. В случае левоинвариантных лоренцевых метрик на трехмерных группах Ли известна работа Дж. Кальварузо, О. Ковальского [2], в которой исследуется задача о существовании группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и заданными значениями спектра оператора Риччи.

Более подробная информация об истории исследований кривизны левоинвариантных (псевдо)римановых метрик на группах Ли содержится в [3–12].

Основная цель данной работы — изучить вопрос о предписанных значениях оператора секционной кривизны на трехмерных метрических группах Ли.

Основные определения и обозначения. Пусть (G, g) – n-мерная группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g, $\{\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]\}$ – соответствующая алгебра Ли. Пусть ∇ – связность Леви-Чивита.

(Псевдо)риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на расслоении $\Lambda^2 G$ по правилу

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2\rangle = \det(\langle X_i, Y_i\rangle).$$

Риманов тензор кривизны в любой точке можно рассматривать как оператор $\mathcal{K}\colon \Lambda^2 G \to \Lambda^2 G$, называемый оператором секционной кривизны и определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{K}(Z \wedge T)\rangle = R(X, Y, Z, T).$$

В отличие от случая римановой метрики, где всегда существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{K}$ диагональна, в лоренцевом случае могут возникнуть различные случаи, известные как *типы Сегре* (см. [13]). В размерности 3 возможны следующие случаи: $\{111\}$, $\{1z\bar{z}\}$, $\{21\}$, $\{3\}$.

Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять компоненты матрицы $\mathcal{K}$ как функции структурных констант c_{ij}^k и метрического тензора g_{ij} (подробнее см. [6, 9, 14]):

$$\begin{gathered}
c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks}, \quad \Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij}\right), \\
\Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks}, \\
R_{ijkt} = c_{ij}^s \Gamma_{sk,t} - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is,t} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js,t}, \\
\tilde{g}_{11} = \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \tilde{g}_{12} = \begin{vmatrix} g_{23} & g_{21} \\ g_{33} & g_{31} \end{vmatrix}, \\
\tilde{g}_{13} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}, \tilde{g}_{22} = \begin{vmatrix} g_{33} & g_{31} \\ g_{13} & g_{11} \end{vmatrix}, \\
\tilde{g}_{23} = \begin{vmatrix} g_{31} & g_{32} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix}, \tilde{g}_{33} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}, \\
\|\tilde{g}^{ij}\| = \|\tilde{g}_{ij}\|^{-1}, \\
K_{11} = R_{2323},\ K_{12} = R_{2331},\ K_{13} = R_{2312}, \\
K_{22} = R_{3131},\ K_{23} = R_{3112},\ K_{33} = R_{1212}, \\
\mathcal{K}_i^j = K_{ik} \tilde{g}^{kj}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Пусть теперь G – трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой.

Определим структурные константы и удобный для вычисления базис в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой (см. [2, 9, 14, 15]).

Лемма. *Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой g и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, тогда в $\mathfrak{g}$ существует базис, в котором структурные константы и метрический тензор имеют один из видов, приведенных в таблице 1.*

Замечание. *Существуют ровно шесть неизоморфных трехмерных унимодулярных алгебр Ли и соответствующих им типов унимодулярных трехмерных групп Ли (см. [3]). Все они приведены в таблице 2 вместе с условиями на структурные константы, при которых алгебра Ли имеет данный тип. Если в таблице 2 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли, и столбца, соответствующему типу, стоит знак "–", значит, что для данной алгебры Ли невозможен соответствующий тип базиса.*

Предписанные значения оператора одномерной кривизны $\mathcal{K}$. Приведем результаты изучения вопроса о предписанных значениях оператора секционной кривизны на трехмерных метрических группах Ли.

Теорема 1. *Трехмерная унимодулярная алгебра Ли с лоренцевым скалярным произведением, допускающая базис типа A1, и оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует в том и только в том случае, если $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$, и собственные значения k_1, k_2, k_3 удовлетворяют условиям*

1. *Либо $k_1 = k_2 = k_3 = 0$,*
2. *Либо ровно два из выражений $k_1 + k_2$, $k_1 + k_3$, $k_2 + k_3$ равны нулю.*

Таблица 1

Структурные константы и метрический тензор в удобных для вычислений базисах трехмерных метрических алгебр Ли

Случай	C	g	Ограничения
Алгебра Ли унимодулярна			
A1	$c_{12}^3=\lambda_3,\ c_{31}^2=\lambda_2,\ c_{32}^1=\lambda_1$	$g_{22}=g_{33}=-g_{11}=1$	
A2	$c_{13}^3=c_{21}^2=1,\ c_{12}^3=1-\lambda_2,\ c_{31}^2=1+\lambda_2,\ c_{23}^1=\lambda_1$	$g_{11}=g_{22}=-g_{33}=1$	
A3	$c_{12}^1=c_{31}^1=c_{23}^2=c_{23}^3=1,\ c_{21}^3=c_{31}^2=c_{23}^1=\lambda$	$g_{11}=g_{22}=-g_{33}=1$	
A4	$c_{12}^3=\lambda_3,\ c_{31}^1=c_{23}^2=\beta,\ c_{31}^2=c_{32}^1=\alpha$	$g_{22}=g_{33}=-g_{11}=1$	$\beta\neq 0$
Алгебра Ли неунимодулярна			
A	$c_{13}^1=\lambda\sin\varphi,\ c_{31}^2=\mu\cos\varphi,$ $c_{23}^1=\lambda\cos\varphi,\ c_{23}^2=\mu\sin\varphi$	$g_{11}=g_{22}=-g_{33}=1$	$\varphi\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ $\lambda+\mu\neq 0,$ $\lambda\geqslant 0,\ \mu\geqslant 0$
B	$c_{31}^1=t,\ c_{31}^2=s,\ c_{23}^1=p,\ c_{23}^2=q$	$g_{22}=-g_{13}=-g_{31}=1$	$q\neq t$
C1	$c_{31}^1=s,\ c_{13}^2=c_{23}^1=p,\ c_{23}^2=q$	$g_{11}=g_{33}=-g_{22}=1$	$q\neq s$
C2	$c_{13}^1=c_{23}^2=q,\ c_{31}^2=r,\ c_{23}^1=p$	$g_{11}=g_{33}=-g_{22}=1$	$q\neq 0,$ $p+r\neq 0$

Таблица 2

Трехмерные унимодулярные метрические алгебры Ли

Алг. Ли	Ограничения на структурные константы			
	A1	A2	A3	A4
$su(2)$	$\lambda_1<0,\ \lambda_2,\lambda_3>0$	–	–	–
$sl(2,\mathbb{R})$	$\lambda_1,\lambda_2>0,\ \lambda_3<0$ или $\lambda_1,\lambda_2<0,\ \lambda_3>0$ или $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$	$\lambda_1,\lambda_2\neq 0$	$\lambda\neq 0$	$\lambda_3\neq 0$
$e(2)$	$\lambda_1<0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_3=0$ или $\lambda_1<0,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3>0$ или $\lambda_1=0,\ \lambda_2,\lambda_3>0$	–	–	–
$e(1,1)$	$\lambda_1,\lambda_2>0,\ \lambda_3=0$ или $\lambda_1,\lambda_3>0,\ \lambda_2=0$ или $\lambda_1=0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_3<0$	$\lambda_1=0,\ \lambda_2\neq 0$ или $\lambda_1\neq 0,\ \lambda_2=0$	$\lambda=0$	$\lambda_3=0$
h	$\lambda_1<0,\ \lambda_2,\lambda_3=0$ или $\lambda_1=\lambda_3=0,\ \lambda_2>0$ или $\lambda_1,\lambda_2=0,\ \lambda_3>0$	$\lambda_1,\lambda_2=0$	–	–
$\mathbb{R}^3$	$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3=0$	–	–	–

3. Либо $(k_1+k_2)(k_1+k_3)(k_2+k_3)<0$.

Доказательство. Из (1) следует, что матрица оператора секционной кривизны в базисе типа A1 имеет диагональный вид и ее собственные значения действительны и равны

$$k_1=-\frac{1}{4}(\lambda_3+\lambda_1-\lambda_2)^2+\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2),$$
$$k_2=-\frac{1}{4}(\lambda_3+\lambda_2-\lambda_1)^2+\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1),$$
$$k_3=-\frac{1}{4}(\lambda_3+\lambda_2-\lambda_1)^2+\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1).$$

Пусть $\mu_i=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\lambda_i$. Тогда заметим, что

$$k_1+k_2=-2\mu_1\mu_2,$$
$$k_1+k_3=-2\mu_1\mu_3,$$
$$k_2+k_3=-2\mu_2\mu_3.$$

Пусть как минимум два из μ_i равны нулю. Это влечет равенство нулю правых частей у всех трех уравнений, и система имеет решение $k_1=\ k_2=\ k_3=0$.

Пусть одно из μ_i равно нулю, тогда ровно два из выражений k_1+k_2, k_1+k_3, k_2+k_3 равны нулю.

Пусть $\mu_i\neq 0$, тогда из равенств

$$\mu_1^2=-\frac{1}{2}\frac{(k_1+k_2)(k_1+k_3)(k_2+k_3)}{(k_1+k_2+k_3-k_i)^2}$$

вытекает, что система разрешима тогда и только тогда, когда

$$(k_1+k_2)(k_1+k_3)(k_2+k_3)<0.$$

Для остальных случаев формулировки и доказательства теорем строятся аналогично.

Заключение. В результате проведенных исследований были даны ответы на часть нерешенных проблем теории операторов кривизны на метрических группах Ли малой размерности, а именно найдены необходимые и достаточные условия существования трехмерной метрической группы Ли с предписанными значениями спектра оператора секционной кривизны.

Библиографический список

1. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedicata. — 1996. — No. 1. DOI: 10.1007/BF00240002.

2. Calvaruso G., Kowalski O. On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds // Cent. Eur. J. Math. — 2009. — V. 7(1). DOI: 10.2478/s11533-008-0061-5.

3. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — V. 21. DOI: 10.1016/S0001-8708(76)80002-3.

4. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Матем. труды. — 2008. — Т. 11(2). — С. 115–147. DOI: 10.3103/S1055134409040038.

5. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Матем. труды. — 2009. — Т. 12(1). DOI: 10.3103/S1055134410010013.

6. Воронов Д.С., Гладунова О.П. Сигнатура оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2010. — № 1/2.

7. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Левоинвариантные лоренцевы метрики на 3-мерных группах Ли с нулевым квадратом длины тензора Схоутена-Вейля // Вестник Алтайского гос. пед. ун-та. — 2004. — № 4-3.

8. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. — 2006. — Т. 37.

9. Пастухова С.В., Хромова О.П. О сигнатуре оператора тензора кривизны Риччи трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2.DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-26.

10. Пастухова С.В., Хромова О.П. О предписанных значениях спектров операторов тензоров Риччи и одномерной кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками // Дни геометрии в Новосибирске — 2015 : тезисы Междунар. конф. — Новосибирск, 2015.

11. Calvaruso G. Pseudo-Riemannian 3-manifolds with prescribed distinct constant Ricci eigenvalues // Diff. Geom. Appl. — 2008. — V. 26. DOI: 10.1016/j.difgeo.2007.11.031.

12. Kowalski O. Nonhomogeneous Riemannian 3-manifolds with distinct constant Ricci eigenvalues // Nagoya Math. J. — 1993. — Vol. 132.

13. Bueken P., Djorić M. Three-dimensional Lorentz metrics and curvature homogeneity of order one // Ann. Glob. Anal. Geom. — 2000. — Vol. 18. DOI: 10.1023/A:1006612120550.

14. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Матем. труды. — 2006. — Т. 9(1). DOI: 10.3103/S1055134407030030.

15. Calvaruso G. Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. — 2007. — Vol. 57. DOI: 10.1016/j.geomphys.2006.10.005.