УДК 512.81

Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с недиагонализируемым оператором Риччи*

П.Н. Клепиков, Е.Д. Родионов
Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Algebraic Ricci Solitons on the Metric Lie Groups with Nondiagonalizable Ricci Operator

P.N. Klepikov, E.D. Rodionov
Altai State University (Barnaul, Russia)

В последнее время активно изучаются различные обобщения многообразий Эйнштейна, например многообразия с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, а также солитоны Риччи, впервые рассмотренные Р. Гамильтоном.

Солитоны Риччи на однородных (псевдо)римановых пространствах и, в частности, на группах Ли изучались многими математиками. Так, например, на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой размерности не более четырех (и унимодулярных групп Ли любой размерности) не существует нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи. Вопрос о существовании нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на группах Ли размерности более четырех с левоинвариантной римановой метрикой до сих пор остается открытым.

Другим важным примером солитонов Риччи являются алгебраические солитоны Риччи на группах Ли, которые впервые были рассмотрены Х. Лауре. Позднее было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой является однородным солитоном Риччи.

В данной работе показано существование нетривиальных алгебраических и однородных инвариантных солитонов Риччи на конформно плоских группах Ли в случае недиагонализируемого оператора Риччи, а также на группах Ли с гармоническим тензором Вейля.

Ключевые слова: метрические группы Ли, метрические алгебры Ли, алгебраические солитоны Риччи, однородные инвариантные солитоны Риччи, недиагонализируемый оператор Риччи.

In recent years, various generalizations of Einstein manifolds are actively studied, for example, manifolds with the trivial Schouten-Weyl tensor, and Ricci solitons, which were first considered by R. Hamilton.

Ricci solitons on homogeneous (pseudo)Riemannian spaces and, in particular, on the Lie groups have been studied by many mathematicians. For example, there are no nontrivial homogeneous invariant Ricci solitons on three and four-dimensional Lie groups with a left-invariant Riemannian metric. A similar result was proved for the unimodular Lie groups with a left-invariant Riemannian metric in any dimension. However, this question is still an open problem for nonunimodular Lie groups of dimension more than 4.

Another important example of Ricci solitons is the case of algebraic Ricci solitons on Lie groups, first considered by J. Lauret. Later, it was proved that every algebraic Ricci soliton on a Lie group with left-invariant (pseudo)Riemannian metric is a homogeneous Ricci soliton.

This paper shows the existence of non-trivial algebraic and homogeneous invariant Ricci solitons on conformally flat Lie groups in the case of nondiagonalizable Ricci operator. Also, a nondiagonalizable Ricci operator on Lie groups with harmonic Weyl tensor is demonstrated.

Key words: metric Lie groups, metric Lie algebras, algebraic Ricci solitons, homogeneous invariant Ricci solitons, nondiagonalizable Ricci operator.

DOI 10.14258/izvasu(2017)1-16

Введение, обзор, определения и постановка задачи. Исследованию многообразий постоянной кривизны Риччи, или эйнштейновых многообразий, посвящены работы многих математиков (см., например, обзоры [1, 2]). В последнее время изучаются различные обобщения многообразий Эйштейна, одними из которых являются со-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: №16–01–00336А, №16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ (код проекта: 1148).

литоны Риччи, впервые рассмотреные Р. Гамильтоном в работе [3].

Определение 1. (Псевдо)риманово многообразие (M, g) называется *солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g, \tag{1}$$

где r — тензор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X.
$(G/H, g)$ — однородное (псевдо)риманово пространство, удовлетворяющее (1), называется *однородным солитоном Риччи.*
(G, g) — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой, удовлетворяющая (1) с некоторым левоинвариантным векторным полем X, называется *однородным инвариантным солитоном Риччи.*

Солитоны Риччи естественным образом связаны с решениями уравнения потока Риччи [3]. Метрика g_0 — метрика солитона Риччи тогда и только тогда, когда $g(t) = \sigma(t)\psi_t^*(g_0)$ — решение уравнения потока Риччи:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2r(g), \quad g(0) = g_0,$$

где $r(g)$ — тензор Риччи метрики g, $\sigma(t)$ — гладкая функция, ψ_t — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов на многообразии, причем $\sigma(0) = 1$ и $\psi_0 = id_{M^n}$.

Определение 2. Солитон Риччи называется *растягивающимся*, если $\Lambda < 0$; *устойчивым*, если $\Lambda = 0$; *стягивающимся*, если $\Lambda > 0$. Также назовем солитон Риччи *тривиальным*, если он изометричен многообразию Эйнштейна или пряму произведению эйнштейнового многообразия и (псевдо)евклидова пространства.

Если однородный риманов солитон устойчив, то тензор Риччи тривиален (см. подробнее в [4]) и, по теореме Алексеевского-Кимельфельда, многообразие является плоским (см. [5]). В случае стягивающегося однородного риманова солитона из работ [3, 6] вытекает, что он изометричен произведению компактного однородного эйнштейнова многообразия и евклидова пространства. Если однородный риманов солитон растягивающийся, то M некомпактно (см. [7]). Известные нетривиальные растягивающиеся однородные римановы солитоны Риччи изометричны солвсолитонам (см. [8, 9]).

Кроме того, на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой размерности не более четырех не существует нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи (см. [10–12]). Аналогичный факт известен для унимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой любой конечной размерности. Вопрос о существовании нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на группах Ли размерности более четырех с левоинвариантной римановой метрикой до сих пор остается открытым.

Определение 3. Группа Ли G с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g называется *алгебраическим солитоном Риччи*, если выполняется уравнение

$$\rho = \Lambda \cdot \mathrm{Id} + D,$$

где ρ — оператор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, Id — тождественный оператор, D — оператор дифференцирования алгебры $\mathfrak{g}$.

Другим важным примером являются алгебраические солитоны Риччи на группах Ли, которые впервые были рассмотрены Х. Лауре. Им же было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой является однородным солитоном Риччи (см. [13]). Позднее этот результат был обобщен К. Онда на случай групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой (см. [14]).

В случае однородных псевдоримановых пространств ситуация представляется менее ясной. Так, в работах [15, 16] получена классификация алгебраических и однородных инвариантных солитонов Риччи на трехмерных метрических группах Ли. Кроме того, было доказано, что в псевдоримановом случае существуют однородные инвариантные солитоны Риччи, которые не являются алгебраическими.

В случае четырехмерных однородных псевдоримановых пространств известна работа [17], в которой получена классификация алгебраических солитонов Риччи на обобщенно симметрических пространствах, а также статья [18], где изучаются однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных однородных псевдоримановых пространствах с нетривиальной подгруппой изотропии.

Работы [19, 20] посвящены изучению алгебраических солитонов Риччи на группах Ли с тривиальным ($W = 0$) или гармоническим ($\operatorname{div} W = 0$) тензором Вейля. В них доказана следующая теорема.

Теорема [19, 20]. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой алгебраического солитона Риччи и $\operatorname{div} W = 0$ (или, в частности, $W = 0$). Если оператор Риччи диагонализируем, то алгебраический солитон Риччи тривиален.*

Целью данной статьи является рассмотрение некоторых примеров алгебраических солитонов Риччи на n-мерных метрических группах Ли с тривиальным ($W = 0$) или гармоническим ($\operatorname{div} W = 0$) тензором Вейля и с недиагонализируемым оператором Риччи, что является существенным дополнением к результатам работ [11, 12, 14, 15, 19, 20].

Метрическая алгебра Ли $\mathfrak{g}_1$. Рассмотрим метрическую алгебру Ли $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^{n-1} \rtimes \mathbb{R}$ размерности $n \geqslant 3$, ненулевые скобки Ли которой задаются равенствами

$$[e_i, e_n] = \alpha e_i,\ i \leqslant n-2, \quad [e_{n-1}, e_n] = \beta e_{n-1}, \quad (2)$$

где $\alpha = \frac{\beta(n-2) \pm \sqrt{(n-2)(\beta^2(n-2) - 4\varepsilon_0)}}{2(n-2)}$. Нетривиальные скалярные произведения задаются следующими равенствами:

$$\langle e_i, e_i \rangle = \varepsilon_i,\ \text{если } i \leqslant n-2, \quad \langle e_{n-1}, e_n \rangle = \varepsilon_0.$$

Прямые вычисления показывают, что оператор Риччи алгебры $\mathfrak{g}_1$ в данном базисе имеет вид

$$\rho(e_i) = 0,\ i \neq n; \quad \rho(e_n) = e_{n-1},$$

из чего следует, что оператор Риччи не является диагонализируемым.

Из вида коммутационных соотношений (2) следует, что $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subseteq \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_{n-1})$, а значит

$$\rho([e_i, e_j]) = 0.$$

Пусть $i, j \neq n$, тогда

$$[\rho(e_i), e_j] + [e_i, \rho(e_j)] = 0,$$

если же $i = n$ и $j \neq n$, то

$$[\rho(e_n), e_j] + [e_n, \rho(e_j)] = [e_{n-1}, e_j] = 0.$$

Из вышеприведенных выкладок следует, что оператор Риччи ρ является дифференцированием в алгебре Ли $\mathfrak{g}_1$, а значит метрическая алгебра Ли $\mathfrak{g}_1$ является устойчивым алгебраическим солитоном Риччи. Нетривиальность данного солитона следует из того, что оператор Риччи не является диагонализируемым.

Кроме того, пусть $\beta \neq 0$, тогда рассмотрим вектор $X = \frac{1}{\beta} e_{n-1}$. Тогда оператор ad_X имеет вид

$$\operatorname{ad}_X(e_i) = 0,\ i \neq n; \quad \operatorname{ad}_X(e_n) = e_{n-1}.$$

Таким образом, метрическая алгебра Ли $\mathfrak{g}_1$ является однородным инвариантным солитоном Риччи (см. [19]).

Отметим также, что метрическая алгебра Ли $\mathfrak{g}_1$ является конформно плоской (т.е. $W = 0$), а при $\beta = 0$ — локально симметричной (т.е. $\nabla R = 0$). Таким образом, данный пример дополняет результаты работы [19], где показано, что каждый алгебраический солитон Риччи на конформно плоской метрической группе Ли с диагонализируемым оператором Риччи является тривиальным.

Метрическая алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$. Рассмотрим метрическую алгебру Ли $\mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}^{n-1} \rtimes \mathbb{R}$ размерности $n \geqslant 3$, ненулевые скобки Ли которой задаются равенствами

$$[e_i, e_n] = \alpha_i e_i,\ i \leqslant n-2, \quad [e_{n-1}, e_n] = \beta e_{n-1},$$

где параметры α_i и β выбираются так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i^2 - \beta \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i + \varepsilon_0 = 0.$$

Нетривиальные скалярные произведения задаются следующими равенствами:

$$\langle e_i, e_i \rangle = \varepsilon_i,\ \text{если } i \leqslant n-2, \quad \langle e_{n-1}, e_n \rangle = \varepsilon_0.$$

Отметим, что метрическая алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ при $\alpha_i = \alpha$ для любого i совпадает с метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}_1$.

Как и в случае алгебры $\mathfrak{g}_1$, аналогичные выкладки показывают, что оператор Риччи алгебры $\mathfrak{g}_2$ является недиагонализируемым, а также что метрическая алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ — нетривиальный устойчивый алгебраический солитон Риччи и нетривиальный однородный инвариантный солитон Риччи.

Метрическая алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ имеет гармонический тензор Вейля (т.е. $\operatorname{div} W = 0$), а при $\beta = 0$ является локально симметричной (т.е. $\nabla R = 0$). Она является конформно плоской тогда и только тогда, когда совпадает с метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}_1$, т.е. при равных параметрах α_i. Таким образом, данный пример дополняет результаты работы [20], где показано, что каждый алгебраический солитон Риччи на метрической группе Ли с гармоническим тензором Вейля и диагонализируемым оператором Риччи является тривиальным.

Заключение. В результате проведенных исследований решена часть задач теории солитонов Риччи, получены следующие результаты:

1. Показано, что в случае недиагонализируемого оператора Риччи существуют нетривиальные алгебраические солитоны Риччи на конформно плоских группах Ли произвольной размерности больше либо равной 3.

2. Построен пример однородного инвариантного солитона Риччи на конформно плоской группе Ли произвольной размерности.

3. Доказано существование нетривиальных алгебраических и однородных инвариантных солитонов Риччи на группах Ли с гармоническим тензором Вейля и недиагонализируемым оператором Риччи.

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна : в 2 т. пер. с англ. — М., 1990.

2. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия. — 2006. — Т. 37.

3. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. — 1988. — Vol. 71. DOI: 10.1090/conm/071/954419.

4. Lauret J. Einstein solvmanifolds and nilsolitons, New development in Lie theory and geometry // Contemp. Math. — 2009. — Vol. 491. DOI: 10.1090/conm/491/09607.

5. Alexeevskii D.V. Kimel'fel'd B.N. Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature // Funktional. Anal. i Pril. — 1975. — Vol. 9, No 2. DOI: 10.1007/BF01075445.

6. Petersen P., Wylie W. On gradient Ricci solitons with symmetry // Proc. Amer. Math. Soc. — 2009. — Vol. 137, No 6. DOI: 10.1090/S0002-9939-09-09723-8.

7. Ivey T. Ricci solitons on compact three-manifolds // Differential Geometry and Applications. — 1993. — Vol. 3, No 4. DOI: 10.1016/0926-2245(93)90008-O.

8. Jablonski M. Homogeneous Ricci solitons // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. — 2015. — Vol. 2015, No 699. DOI: 10.1515/crelle-2013-0044.

9. Jablonski M. Homogeneous Ricci solitons are algebraic // Geometry & Topology. — 2014. — Vol. 18. DOI: 10.2140/gt.2014.18.2477.

10. Cerbo L.F. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. — 2014. — Vol. 14(2). DOI: 10.1515/advgeom-2013-0031.

11. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — №1/2. DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-21.

12. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Об однородных солитонах Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. — 2015. — Т. 465, № 3. DOI: 10.7868/S0869565215330051.

13. Lauret J. Ricci soliton homogeneous nilmanifolds // Math. Ann. — 2001. — Vol. 319, No. 4. DOI: 10.1007/PL00004456.

14. Onda K. Examples of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo-Riemannian Case // Acta Mathematica Hungarica. — 2014. — Vol. 144, No. 1. DOI: 10.1007/s10474-014-0426-0.

15. Batat W., Onda K. Algebraic Ricci Solitons of three-dimensional Lorentzian Lie groups // arXiv.org. — 2012.

16. Brozos-Vazquez M., Calvaruso G., Garcia-Rio E., Gavino-Fernandez S. Three-dimensional Lorentzian homogeneous Ricci solitons — 2009.

17. Batat W., Onda K. Four-Dimensional Pseudo-Riemannian Generalized Symmetric Spaces Which are Algebraic Ricci Solitons // Results. Math. — 2013. — Vol. 64, No 3. DOI: 10.1007/s00025-013-0312-z.

18. Calvaruso G., Fino A. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous Ricci solitons // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. — 2015. — Vol. 12, No 05. DOI: 10.1142/S0219887815500565

19. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Конформно плоские солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2016. — №89(1). DOI: 10.14258/izvasu(2016)1-22.

20. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля // ДАН. — 2017. — Т. 472, № 5.