УДК 517.5

Обобщенные гармонические ряды на гипердействительных структурах в AST

С.В. Дронов
Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Generalized Harmonic Series on Hyperreal Structures in the AST

S.V. Dronov
Altai State University (Barnaul, Russia)

Наиболее интересные приложения альтернативная теория множеств (AST) получает в исследованиях классических задач математического анализа с новой точки зрения. При этом класс действительных чисел **R** заменяется на гипердействительную структуру, построение которой основано на некотором начальном отрезке натуральных чисел. Этот отрезок обязательно обладает той или иной степенью нечеткости, подменяет собой горизонт и называется основным сегментом структуры. Некоторые свойства **R** при этом остаются справедливыми, другие – нет. Цикл работ автора посвящен исследованию связи набора сохраняющихся свойств со степенью нечеткости основного сегмента. В статье делается попытка перенесения теории суммирования числовых рядов на гипердействительные структуры. Основной результат связан с обобщенными гармоническими рядами – рядами с общим членом n^{-p}. Показано, что если сегмент мультипликативен, то ряд сходится, грубо говоря, при $p > 1$, а если лишь аддитивен, то только при $p > 2$, что является довольно неожиданным. Найденный эффект может использоваться для характеризации степени неопределенности сегмента тем минимальным p, при котором на соответствующей гипердействительной структуре сходится исследуемый ряд.

Ключевые слова: альтернативная теория множеств, гипердействительные структуры, гармонический ряд, сходимость числовых рядов.

A most useful applications the Alternative Set Theory gets in studying several classical problems of calculus from a fresh point of view. Here, the class of all real numbers is replaced by a hyperreal structure based on some initial segment of natural numbers class. This segment must have more or less degree of uncertainty. It represents some horizon and is called a cut. This hyperreal structure inherits some properties of the real numbers, and some not. We investigate the relation of inherited properties with the uncertainty degree of the main cut of the structure. In this paper, an attempt to extrapolate the theory of numerical series summing to the hyperreal structures is presented. In particular, the classical theorem of comparison for numerical series is verified. The main result of the research is related with the so-called generalized harmonic series – the series of the type $\sum n^{-p}$. We show that if the main cut is closed with respect to the multiplication of its elements, then, roughly speaking, the series converges for $p > 1$. If the cut is additive but not multiplicative then it converges for $p > 2$ only, which is rather surprising. This can be used to characterize a degree of uncertainty of the cut by the minimal p for which the series of the investigated type converges on the correspondent hyperreal structure.

Key words: alternative sets theory, hyperreal structures, harmonic series, numerical series convergence.

DOI 10.14258/izvasu(2017)1-14

1. Вводные замечания. Постановка задачи. Распространение классических результатов математического анализа на неклассические действительноподобные структуры – один из трендов современной математики (см., например, [1, 2]). При этом математика в альтернативной теории множеств (Alternative Sets Theory, AST) несмотря на ее привлекательность и интуитивную прозрачность остается в стороне от основного потока исследований в этом направлении. Цикл статей автора, продолжением которого является данная работа, имеет своей целью хотя бы частично восполнить это упущение.

В аксиоматике AST внутри класса натуральных чисел предполагается существование некоторых нечетких горизонтов, которые принято называть сегментами. Сегменты класса натуральных чисел представляют собой начальные отрезки этого класса. Ближайший из них называется классом конечных натуральных чисел и обозначается **FN**. Он на интуитивном уровне соответствует общепринятым представлениям о классе натуральных чисел, и все обычные свойства этих чисел на нем выполнены. Строгое изложение аксиоматики AST, корректное определение и обоснование свойств **FN** содержится в книгах П. Вопенки [3] и [4]. Но по мере удаления от начала натурального ряда возможные сегменты начинают терять некоторые из этих свойств (исследования в этом направлении были начаты П. Златошем, М. Калиной [5, 6] и А. Сохором [7]). Введем здесь некоторые определения. Сегмент класса натуральных чисел A назовем замкнутым относительно операции $*$, если

$$(\forall n, k \in A) \quad n * k \in A.$$

Если речь идет об операции сложения, то такой сегмент называют аддитивным, если умножения, – то мультипликативным. Имея замкнутость относительно операции $n{*}k = n^k$, условимся для краткости говорить о степенном сегменте. Все перечисленные сегменты лишены четкой верхней границы: $(\forall n)\ n \in A \Rightarrow n+1 \in A$.

Наличие сразу нескольких нечетких горизонтов приводит к тому, что даже монотонные ограниченные последовательности элементов упорядоченных классов, пронумерованные их элементами, могут не иметь пределов. В [8], продолжением которой является данная работа, была предпринята попытка понять, почему такое возможно, и рассмотрены частичные суммы гармонического ряда как один из примеров.

Пусть A – аддитивный сегмент класса натуральных чисел; p – рациональное число, лежащее в классе A-ограниченных рациональных чисел:

$$\mathbf{BQ}(A) \ = \ \{p \in \mathbf{Q} |\ (\exists n \in A)\ |p| < n\}.$$

Основная задача работы состоит в том, чтобы выяснить, при каких значениях p сходится ряд $\sum_{n \in A} \frac{1}{n^p}$.

Следуя терминологии [9], такие ряды назовем обобщенными гармоническими. На классе $\mathbf{BQ}(A)$ рассматривают особое отношение, которое называют A-неразличимостью. Оно является отношением эквивалентности лишь для сегментов A, обладающих свойством аддитивности, поэтому иных сегментов в работе мы не рассматриваем. Фактор-класс $\mathbf{BQ}(A)$ по этому отношению называют гипердействительной структурой с основным сегментом A.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть сегмент A не является мультипликативным. Тогда для произвольного $q \in \mathbf{BQ}(A),\ q > 1, q \not\approx_A 1$ найдется $m \in A$ такое, что $(\forall n \in A)\ m^q > n$.*

Доказательство. Из условия вытекает, что найдется $s \in A$ такое, что $q > 1+\frac{1}{s}$. Предположим, напротив, что

$$(\forall m \in A)(\exists n_m \in A) \quad m^q \le n_m.$$

Зафиксируем некоторое $m \in A$ и положим

$$m_{(1)} = n_m,\ m_{(t)} = n_{m_{(t-1)}},\ t \in A,\ t > 1.$$

Тогда для произвольного $t \in A$ выполнено $(\exists n_t \in A)\ m_{(t)} < n_t$ и

$$m_{(t)} \ \ge \ m^{\left(1+\frac{1}{s}\right)^t} \ \ge \ m^{1+t/s}.$$

На последнем шаге было использовано известное неравенство Я. Бернулли

$$(\forall x \ge 1)(\forall \alpha > 0)\ x^\alpha \ge 1 + \alpha(x-1).$$

Таким образом, получено, что для произвольного $m \in A$ верно $m^2 \le m_{(s)} < n_s \in A$, что означает замкнутость сегмента A относительно возведений в квадрат. Но, как известно, это свойство сегмента эквивалентно его мультипликативности, тогда как A не таков. Полученное противоречие доказывает лемму.

Временно будем рассматривать все наши числа как элементы обычного класса действительных чисел. При $p > 1$ определим

$$S_{n,m} = \frac{1}{(n+1)^p} + ... + \frac{1}{m^p},\ n, m \in A, m > n.$$

Лемма 2. *Для $n \in A$ имеет место*

$$S_{n,m} \le \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Если A аддитивный сегмент и $p \not\approx 1, p > 1$, то для произвольного $n \ge 4(p-1)$ найдется $m > n$, $m \in A$, такое, что

$$S_{n,m} \ \ge \ \frac{1}{4(p-1)n^{p-1}}. \tag{1}$$

Если сегмент A является степенным, то (1) остается справедливым для всех $p \not\approx_A 1, p > 1$.

Доказательство. Рассмотрим

$$I_{n,m} = \int_n^m \frac{dx}{x^p} \ = \ \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{m^{p-1}}\right).$$

Ясно, что

$$I_{n,m} = \sum_{j=n}^{m-1} \int_j^{j+1} \frac{dx}{x^p} \ge \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{(j+1)^p} = S_{n,m},$$

откуда

$$S_{n,m} \ \le \ \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{m^{p-1}}\right) \ < \ \frac{1}{(p-1)n^{p-1}},$$

что доказывает первое утверждение леммы.

С другой стороны,

$$I_{n,m} \le \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{j^p} \; = \; S_{n,m} + \frac{1}{n^p} - \frac{1}{m^p},$$

а значит,

$$S_{n,m} \ge \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{m^{p-1}}\right) - \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{m^p}\right). \tag{2}$$

Если выполнены предположения второго или третьего утверждения леммы, то найдется $s \in A$ такое, что

$$s^p \; > \; 2s - 1. \tag{3}$$

Действительно, в обоих утверждениях для некоторого t верно $p > 1 + \frac{1}{t}$. Тогда

$$s^p > s \cdot s^{1/t} \ge 2s > 2s - 1$$

при $s \ge 2^t$. При этом во втором утверждении t может быть выбрано конечным, откуда, даже из одной мультипликативности A, следует $2^t \in A$. Если же A степенной, то последнее верно при произвольном $t \in A$, а требуемое t в условиях третьего утверждения существует.

Итак, (3) доказано. Возьмем s, удовлетворяющее этому условию, и положим $m = sn$. Тогда из (2) следует

$$\begin{aligned} S_{n,sn} &\ge \tfrac{1}{p-1}\left(1 - \tfrac{1}{s^{p-1}}\right)\tfrac{1}{n^{p-1}} - \left(1 - \tfrac{1}{s^p}\right)\tfrac{1}{n^p} \ge \\ &\ge \; \tfrac{1}{2(p-1)}\left(1 - \tfrac{1}{s^{p-1}}\right)\tfrac{1}{n^{p-1}} \end{aligned} \tag{4}$$

при $n \ge 4(p-1)$. Действительно, для справедливости этого неравенства достаточно, чтобы было

$$n \; \ge \; 2(p-1)\,\frac{s^p - 1}{s^p - s},$$

но из (3) следует неравенство

$$\frac{s^p - 1}{s^p - s} \; \le \; 2.$$

Осталось заметить, что при выбранном s верно $s^p \ge 2s$, значит, $s^{p-1} \ge 2$, $1 - \frac{1}{s^{p-1}} \ge \frac{1}{2}$, и нужная оценка (1) вытекает из (4). Лемма доказана полностью.

Для получения основного результата нам потребуется неравенство, менее точное, чем (1), но выполненное при менее ограничительных условиях. Пусть основной сегмент лишь аддитивен.

Лемма 3. *Если $1 < p < 2$, то при произвольном $n \ge 3, n \in A$ выполнено*

$$S_{n,2n} \; \ge \; \frac{1}{4n^{p-1}}.$$

Доказательство. Используем (2), выведенное выше без каких-либо условий на основной сегмент. В нашем случае это неравенство дает

$$S_{n,2n} \ge \left(\frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\right)\frac{1}{n^{p-1}}.$$

Зная, что минимум функции $\frac{1}{x}(1 - 2^{-x})$ на отрезке $[0, 1]$ равен $\frac{1}{2}$, для рассматриваемых p можно выражение в скобках можно оценить снизу:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \; \ge \; \frac{1}{4},$$

если только $n \ge 4(1 - 2^{-p})$. Поскольку правая часть последнего неравенства при $1 < p < 2$ не превосходит 3, то доказательство леммы завершено.

3. Основная теорема. Для мультипликативного сегмента A введем класс

$$D(A) \; = \; \{s \in A |\, (\forall k \in A)\; k^s \in A\}.$$

В силу замкнутости мультипликативного сегмента относительно возведения в конечные степени $\mathbf{FN} \subset D(A)$. Понятно также, что $D(A)$ является сегментом, и равенство $D(A) = A$ справедливо лишь в случае степенного A.

Теорема. *Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n \in A} \frac{1}{n^p}$ сходится тогда и только тогда, когда*

1. $p > 1, p \not\approx_A 1$, если A степенной сегмент;

2. $p > 1, p \not\approx_{D(A)} 1$, если A мультипликативный сегмент, не являющийся степенным;

3. $p \approx_A 2$ или $p > 2$, если A аддитивный сегмент, не являющийся мультипликативным.

Доказательство. Во всех утверждениях теоремы основной сегмент обладает свойством аддитивности, поэтому, как показано в [10], условием сходимости ряда служит A-фундаментальность последовательности его частичных сумм:

$$(\forall n, m \in A)\; n, m \ge n_k \Rightarrow |S_n - S_m| < \frac{1}{k}. \tag{5}$$

Во введенных выше обозначениях это означает, что для проверки сходимости ряда нужны оценки величины $S_{n,m}$ сверху и снизу при достаточно больших $n, m \in A$.

Расходимость ряда изучаемого типа во всех заявленных случаях при $p = 1$ была показана в [8]. Там же было показано, что частичные суммы этого ряда не ограничены ни одним из элементов A. В силу этого, а также неравенства

$$(\forall n \in A)\; \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^p} \; \ge \; \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j},$$

выполненного при $p < 1$, во всех изучаемых случаях обобщенные гармонические ряды расходятся при таких p.

Пусть для некоторого натурального s имеет место $p \geq 1 + \frac{1}{s}$. Согласно лемме 2, для нужной фундаментальности тогда достаточно, чтобы при произвольном $k \in A$ нашлось такое $n \in A$, что

$$n^{p-1} \geq \frac{k}{p-1}, \text{ или } n \geq (ks)^s.$$

Если A степенной, то существование n очевидно при произвольном $s \in A$, при этом в (5) возможен выбор

$$n_k \;=\; (ks)^s. \tag{6}$$

Если же A лишь мультипликативен, то выбор (6) все равно возможен, поскольку при $s \in D(A)$ имеет место $ks \in A$ и $(ks)^s \in A$. В случае же аддитивного, но не мультипликативного сегмента A выбор (6) заведомо может быть осуществлен при $s = 1$, если только $p \geq 1 + \frac{1}{s} = 2$. Осталось обосновать сходимость ряда при $p \approx_A 2$, $p < 2$ в случае аддитивного A. Здесь для произвольного $s \in A$ выполнено

$$1 \;<\; \frac{1}{p-1} \;<\; 1 + \frac{1}{s}\,.$$

По лемме 2 $S_{n,m}$ может стать меньше $1/k$ для произвольно выбранного $k \in A$, если

$$n \;\geq\; \left(\frac{k}{p-1}\right)^{1/(p-1)}. \tag{7}$$

Заметим, что если $a > 1$, то из бинома Ньютона следует, что при любом натуральном n

$$a^n = (1 + a - 1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 \geq \frac{n^2}{4}(a-1)^2.$$

Выбрав в полученном неравенстве $a = n^{1/n}$, получаем

$$(n^{1/n} - 1)^2 \;\leq\; \frac{4}{n},$$

откуда при $n \geq 4$ выполнено

$$n^{1/n} \;\leq\; 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \;\leq\; 2. \tag{8}$$

Принимая $s = k$, из этого выводим

$$k^{\frac{1}{p-1}} \leq k^{1+1/k} \leq k \cdot k^{1/k} \leq 2k.$$

Далее, $p > \frac{3}{2}$, значит,

$$(p-1)^{1/(p-1)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1/s} \geq \frac{1}{4}$$

при $s \geq 1$. Окончательно,

$$\left(\frac{k}{p-1}\right)^{1/(p-1)} \;\leq\; 8k,$$

и, как видно из (7), для выполнения условия сходимости ряда (5) достаточно выбрать $n_k = 8k$, что остается в рамках основного сегмента в силу его аддитивности.

Осталось обосновать, что во всех случаях, кроме перечисленных, обобщенный гармонический ряд расходится. Пусть A является степенным и $p > 1$, $p \approx_A 1$. Тогда для достаточно больших $n \in A$ $p < 1 + \frac{1}{n}$ и из леммы 3 и неравенства (8) получаем $S_{n,2n} \geq \frac{1}{8}$, что доказывает расходимость ряда в условиях первого утверждения теоремы.

Обратимся ко второму утверждению. Здесь сегмент A не степенной ($D(A) \neq A$), и p взято так, что для произвольного $s \in D(A)$

$$p \leq 1 + \frac{1}{s}. \tag{9}$$

Но $D(A)$ не является теоретико-множественным классом, поэтому область действия выписанного неравенства строго шире него. Итак, найдется $s \in A, s \notin D(A)$, для которого по-прежнему верно (9). Подберем для него $k \in A$ с условием $k^s \notin A$. Тогда для произвольного n, лежащего в сегменте A, из леммы 3 вытекает

$$S_{n,2n} \;\geq\; \frac{1}{4n^{1/s}} \;\geq\; \frac{1}{4k},$$

что доказывает расходимость ряда при таких p.

Наконец, пусть A аддитивен, но не мультипликативен. Из леммы 1 следует, что в предположениях $p < 2, p \not\approx_A 2$ существует такое $k \in A$, что

$$(\forall n \in A)\; n < \; k^{1/(p-1)}.$$

При этом по лемме 3, $S_{n,2n} \geq \frac{1}{4n^{p-1}} \;>\frac{1}{4k}$ для произвольного $n \in A$, что означает расходимость ряда. Теорема доказана полностью.

4. Обсуждение и выводы. Сравнение числовых рядов с некоторыми образцами, как способ установления их сходимости или расходимости, является привычным и хорошо зарекомендовавшим себя методом в рамках классического математического анализа. Хотя монотонности и ограниченности последовательности частичных сумм для сходимости ряда в аксиоматике AST недостаточно, признаки сравнения в их обычной форме продолжают работать при минимальных дополнительных требованиях на основной сегмент A. Это оказывается связанным с тем, что скорость убывания общего члена ряда фактически определяет скорость роста его частичных сумм, а именно от величины этой скорости и зависит наличие или отсутствие предела (показано в [8]).

В данной работе подтверждено, что обобщенные гармонические ряды $\sum\limits_{n \in A} n^{-p}$ при достаточно больших p сходятся. Но нижняя граница класса таких чисел p по мере увеличения степени нечеткости основного сегмента становится все выше и для сегмента наивысшей допустимой степени нечеткости (аддитивного, но не мультипликативного) достигает интуитивно не очевидного значения 2.

Доказанная теорема делает правдоподобным предположение о том, что свойство замкнутости A относительно возведений в степень является достаточным для сохранения всех основных фактов классической теории суммирования рядов на соответствующих гипердействительных структурах. Вероятно, возможно также классифицировать сегменты класса натуральных чисел по величине минимального p, гарантирующего сходимость соответствующего обобщенного гармонического ряда. Тогда с помощью такого p можно оценить меру нечеткости сегмента, а изучение условий на сегмент, при которых происходит изменение этого p, может способствовать возникновению новой содержательной математической теории на семействе гипердействительных структур.

Библиографический список

1. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals. – N.Y., 2014.

2. Хренников А.Ю. Суперанализ. – М., 2014.

3. Вопенка П. Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность. – Новосибирск, 2004.

4. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств. – М., 1983.

5. Kalina M., Zlatos P. Arithmetic of cuts and cuts of classes // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1988. – № 29.

6. Kalina M., Zlatos P. Cuts of real classes. // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1989. – № 30.

7. Sochor A. Addition of initial segments I, II. // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1988. – № 29.

8. Дронов С.В. О пределах монотонных последовательностей в AST. // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2016. – №1(89). DOI:10.14258/izvasu(2016)1-19.

9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. – М., 2016.

10. Дронов С.В. О свойстве фундаментальности сегментов класса натуральных чисел // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2009. – № 1/1.