

**Оценка параметров функции субъективной полезности***Е.В. Данько*

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

**Evaluation of Subjective Utility Function Parameters***E.V. Danko*

Altai State University (Barnaul, Russia)

Обосновывается метод количественной оценки значений коэффициентов для функции субъективной полезности решений при реализации инвестиционных проектов. Рассматриваемый метод позволяет путем тестирования инвесторов оценить их склонность к риску и отношение к упущенным возможностям.

Рассматриваются процессы реализации инвестиционных проектов в условиях неопределенности. Доходность проекта оценивается показателем  $NPV$ , значения которого случайны и известны инвестору с точностью до отрезка:  $NPV \in [NPV_1; NPV_2]$ . В случае, когда отрезок  $[NPV_1; NPV_2]$  включает нулевое значение, возникают трудности в принятии решения.

Для оптимизации данного процесса разработана модель поддержки принятия решения, в основе которой используется функция субъективной полезности решения. Коэффициенты  $\gamma$  и  $\beta$  являются параметрами данной функции:  $\gamma$  – коэффициент, оценивающий эффект сожаления об упущенной выгоде,  $\beta$  – коэффициент, оценивающий эффект страха риска. Для количественной оценки значений указанных параметров в рамках исследования разработана методика тестирования инвесторов, состоящая из набора тестовых вопросов.

Рассмотрены некоторые особенности самих вопросов, используемых для тестирования инвесторов, а также процесс вычисления усредненных значений искомым коэффициентов.

**Ключевые слова:** оценка полезности решения, склонность к риску, упущенные возможности, ожидаемая полезность, учет индивидуального восприятия ЛПП, оценка результатов инвестиций.

DOI 10.14258/izvasu(2017)1-12

**Введение.** В последнее время активно развивается интеграция научных дисциплин. В частности, методы математики, психологии начинают использоваться в исследованиях экономических и социальных явлений.

В литературе [1–5] отражены некоторые методы формализации влияния индивидуальных особенностей субъекта на процесс принятия решения.

The paper presents a method of quantitative evaluation of subjective utility function parameters for investment decision-making process. The proposed method allows quantitative evaluation of two factors: the individual risk aversion and individual disposition toward lost business opportunities. Both factors are the main psychological aspects that can be observed during a decision-making process under uncertainty and risk.

The effectiveness of an investment project is evaluated by NPV index. This index is considered a random variable that can be estimated by an investor as an interval  $[NPV_1; NPV_2]$ . Main difficulties in decision-making process arise when  $[NPV_1; NPV_2]$  interval includes a zero value.

The mathematical model for decision-making process optimization was developed and proposed in this paper. The model is based on subjective utility function with two parameters:  $\beta$  and  $\gamma$ . Coefficient  $\beta$  is used for quantitative evaluation of fear of financial losses and coefficient  $\gamma$  is used for evaluation of regret of profit loss. The method of quantitative evaluation of  $\beta$  and  $\gamma$  is a test with 10 questions.

Peculiarities of test questions are discussed, and calculation process of sought coefficients is presented.

**Key words:** evaluation of decision utility, risk aversion, loss of profit, expected utility function, evaluation of individual decision-maker characteristics, evaluation of investment results.

Существующие методы в большинстве своем несут качественный характер исследования, количественная оценка влияния индивидуальных особенностей инвесторов рассмотрена только при учете фактора склонности к риску [2–3]. Методы формализации влияния фактора упущенной выгоды на процесс принятия решения представлены в [6].

Рассмотрим случай, когда при оценке чистого приведенного дохода инвестиционного проекта определены показатели  $NPV_1$  (чистый приведенный доход по пессимистическому сценарию реализации проекта) и  $NPV_2$  (чистый приведенный доход по оптимистическому сценарию). В современных условиях указанные величины  $NPV_1$  и  $NPV_2$  закладываются в большинстве бизнес-планов. Рассмотрим случай, когда  $NPV_1 < 0$  и  $NPV_2$ . Указанному случаю может соответствовать любой инвестиционный проект, если рассчитывать показатель  $NPV_1$  по самому негативному сценарию реализации инвестиционного проекта (например, в случае возникновения форс-мажорных обстоятельств).

Мотивом для реализации проекта является возможность получения дохода, оценка величины которого определяется по формуле

$$P = \int_0^{NPV_2} NPV \cdot P(NPV) d(NPV).$$

Риски при реализации такого проекта состоят в возможности получения отрицательного значения для чистого приведенного дохода, а их оценка равна

$$L = \int_{NPV_1}^0 NPV \cdot P(NPV) d(NPV).$$

В работе [6] введены формулы для оценок полезностей решений принятия (1) и отклонения (2) инвестиционного проекта в данной ситуации:

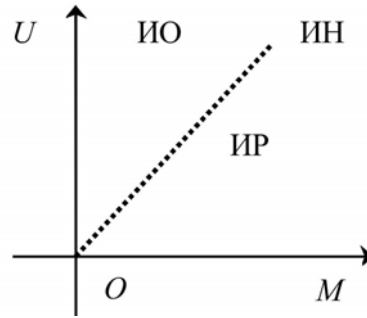
$$U_A = (1 + \beta) \int_{NPV_1}^0 NPV \cdot P(NPV) d(NPV) + \int_0^{NPV_2} NPV \cdot P(NPV) d(NPV); \tag{1}$$

$$U_R = -\beta \int_{NPV_1}^0 NPV \cdot P(NPV) d(NPV) - \gamma \int_0^{NPV_2} NPV \cdot P(NPV) d(NPV). \tag{2}$$

**Оценка допустимых значений параметров функции.** Рассмотрим используемую в литературе [4] классификацию инвесторов в зависимости от особенностей восприятия выигрышей и потерь:

1. Инвестор, склонный к рискованным действиям (ИР).
2. Инвестор, нейтрально относящийся к риску (ИН).
3. Инвестор, склонный к осторожным действиям (ИО).

На рисунке представлены области, соответствующие указанным типам поведения инвесторов в зависимости от оценки полезности дохода ( $U$ ) и величины дохода, выраженной в реальных деньгах ( $M$ ).



Типы инвесторов в зависимости от индивидуального восприятия дохода

Для каждого из рассмотренных типов инвесторов укажем значения параметров функции субъективной полезности, определенной выражениями (1) и (2).

При  $\gamma = \beta = 0$  функция характеризует поведение ИН. В этом случае формула (1) совпадает с формулой математического ожидания результата реализации проекта с известными вероятностями и размерами убытков и доходов. Значение полезности, согласно формуле (2), обращается в нуль, так как при отклонении инвестиционного проекта математическое ожидание результата равно нулю. Значения коэффициентов функции  $\gamma$  и  $\beta$  в данном случае следует трактовать как эффект отсутствия дополнительного «страха риска» ( $\beta = 0$ ) и эффект отсутствия сожаления об упущенной выгоде ( $\gamma = 0$ ).

С учетом сказанного выше субъективные оценки результатов принятия решений ИО отличаются от оценок ИН наличием дополнительного эффекта «страха» наступления рискованной ситуации при принятии проекта. Подтверждающие данный феномен исследования приведены в [7–9]. В случае отклонения проекта учитывается положительная составляющая полезности в виде устранения «страха» риска и отрицательная составляющая полезности, вызванная сожалением о возможной упущенной выгоде. Таким образом, для ИО характерно наличие эффекта «страха риска» ( $\beta > 0$ ) и наличие эффекта сожаления об упущенной выгоде ( $\gamma > 0$ ).

Возможность применения функции субъективной полезности в виде системы формул (1) и (2) для характеристики решений ИР в связи с отсутствием прикладного значения для принятия инвестиционных решений в данной работе не рассмотрена.

**Метод оценки параметров функции субъективной полезности.** Для практического применения предложенной функции к оценке полезностей инвестиционных решений необходим метод для идентификации численных значений коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$  для конкретного инвестора. Оценка коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$  непосредственными измерениями затруднена, поэтому их значения следует оценивать косвенно по наблюдаемым параметрам. К таким параметрам можно отнести показатель индивидуальной толерант-

ности к риску  $\alpha$  [2–4], который может быть оценен с помощью проведения тестовых испытаний [10].

Метод тестовой оценки значений коэффициента  $\alpha$  для конкретного инвестора состоит в следующем:

1) субъект исследования ставится в тестовую ситуацию, в которой возможно получение дохода и убытка с определенными вероятностями, при этом один из параметров (средняя величина дохода или убытка, или соответствующая вероятность) неизвестен;

2) субъекту исследования предлагается указать значение неизвестного параметра, при котором он принимал или отклонял бы подобный инвестиционный проект;

3) на основании полученных ответов проводится вычисление точечной и интервальной оценок коэффициента  $\alpha$ .

Для реализации данного метода составлен перечень вопросов, в которых варьируется соотношение величин риска (доходы/убытки) с вероятностями риска (шансами получения доходов/убытков). При этом уровни риска и упущенной выгоды выбираются в соответствии с раз-

мерами рисков и доходов, встречающихся в практике тестируемого инвестора. Для учета отношения к различным суммам доходов и убытков имеются вопросы с разными возможными величинами выигрышей и проигрышей.

В разработанной методике вопросы для определения склонности ЛПР к риску и его отношения к упущенным возможностям представлены десятью гипотетическими ситуациями, в которых предстоит сделать выбор между имеющимися альтернативами.

Рассмотрим несколько вопросов методики оценки значений коэффициента  $\alpha$ .

1. Пусть имеется возможность получить доход при реализации инвестиционного проекта, размер дохода — 1000 тыс. руб. с вероятностью  $p$ , а также возможен убыток 500 тыс. руб. с вероятностью  $(1-p)$ . Укажите минимально возможное значение для вероятности  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ), при которой вы согласились бы на реализацию подобного проекта.

Далее приведена таблица 1, отражающая соответствие введенного значения  $p$  и коэффициента риска  $\alpha$ .

Таблица 1

Соответствие получаемого ответа на вопрос 1 и значения параметра  $\alpha$

Введенное значение $p$	Среднее математическое ожидание реализации проекта	Значение коэффициента риска $\alpha$
$0 \leq p \leq 0,1$	- 425 тыс. руб.	$\alpha = 0,08$
$0,1 < p \leq 0,2$	- 275 тыс. руб.	$\alpha = 0,23$
$0,2 < p \leq 0,3$	- 125 тыс. руб.	$\alpha = 0,38$
$0,3 < p < 0,333$	- 25 тыс. руб.	$\alpha = 0,47$
$p = 0,333$	0	$\alpha = 0,5$
$0,333 < p \leq 0,4$	50 тыс. руб.	$\alpha = 0,55$
$0,4 < p \leq 0,5$	175 тыс. руб.	$\alpha = 0,68$
$0,5 < p \leq 0,6$	325 тыс. руб.	$\alpha = 0,83$
$0,6 < p \leq 0,7$	475 тыс. руб.	$\alpha = 0,97$
$p > 0,7$	> 550 тыс. руб.	$\alpha = 1$

2. Пусть имеется возможность участия в лотерее, стоимость лотерейного билета — 200 руб., вероятность того, что он ничего не выиграет — 75%, вероятность выигрыша — 25%. Укажите минимальную

сумму выигрыша  $P$  (в руб.), при которой вы согласны участвовать в этой лотерее.

Далее приведена таблица 2, устанавливающая соответствие введенного значения  $P$  и коэффициента риска  $\alpha$ .

Таблица 2

Соответствие получаемого ответа на вопрос 3 и значения параметра  $\alpha$

Введенное значение $P$	Среднее математическое ожидание исхода	Значение коэффициента риска $\alpha$
$0 \leq P \leq 100$	- 137,5 руб.	$\alpha = 0,07$
$100 < P \leq 200$	- 112,5 руб.	$\alpha = 0,14$
$200 < P \leq 300$	- 87,5 руб.	$\alpha = 0,21$
$300 < P \leq 400$	- 62,5 руб.	$\alpha = 0,3$
$400 < P \leq 500$	- 37,5 руб.	$\alpha = 0,38$
$500 < P \leq 600$	- 12,5 руб.	$\alpha = 0,47$
$600 < P \leq 700$	12,5 руб.	$\alpha = 0,55$
$700 < P \leq 800$	37,5 руб.	$\alpha = 0,63$
$800 < P \leq 900$	62,5 руб.	$\alpha = 0,7$
$900 < P \leq 1000$	87,5 руб.	$\alpha = 0,77$
$1000 < P \leq 1100$	112,5 руб.	$\alpha = 0,85$
$1100 < P \leq 1200$	137,5 руб.	$\alpha = 0,92$
$P > 1200$	162,5 руб.	$\alpha = 1$

3. Пусть имеется возможность получения дохода 500 тыс. руб. при реализации инвестиционного проекта с вероятностью  $p$ , также возможен убыток 100 тыс. руб. с вероятностью  $(1-p)$ . Укажите минималь-

ное значение вероятности  $p$ , при которой такой инвестиционный проект будет принят к реализации.

Далее приведена таблица 3, определяющая соответствие введенного значения  $P$  и коэффициента риска  $\alpha$ .

Таблица 3

Соответствие получаемого ответа на вопрос 4 и значения параметра  $\alpha$

Введенное значение $p$	Среднее математическое ожидание реализации проекта	Значение коэффициента риска $\alpha$
$0 \leq p \leq 0,1$	- 70 тыс. руб.	$\alpha = 0,15$
$0,1 < p < 0,166$	- 20 тыс. руб.	$\alpha = 0,4$
$p = 0,166$	0	$\alpha = 0,5$
$0,166 < p \leq 0,2$	10 тыс. руб.	$\alpha = 0,55$
$0,2 < p \leq 0,3$	50 тыс. руб.	$\alpha = 0,75$
$p > 0,3$	110 тыс. руб.	$\alpha = 1$

4. Пусть имеется возможность получения дохода от реализации некоторой продукции с вероятностью 60%, а с вероятностью 40% — получение убытка.

Требуется принять или отклонить данные предложения, имеющие следующие возможные доходы и убытки (табл. 4).

Таблица 4

Возможные итоги реализации продукции

Номер ситуации	1	2	3	4	5	6	7
Доход (60%), тыс. руб.	100	200	500	1000	1000	1200	1500
Убыток (40%), тыс. руб.	250	200	700	1800	1500	1900	1200
Значение $\alpha$	$a = 0,3$	$a = 0,6$	$a = 0,52$	$a = 0,4$	$a = 0,5$	$a = 0,45$	$a = 0,75$

Для тех случаев из таблицы 4, где ЛПР выбирает «принять предложение», программа запоминает соответствующее значение коэффициента  $\alpha$ . Далее выбирается минимальное значение коэффициента  $\alpha$  из всех выбранных ситуаций.

Усредненный коэффициент  $\alpha$  вычисляется следующим образом:

$$\alpha = \frac{\sum_{j=1}^{10} k_j \cdot \alpha_j}{\sum_{j=1}^{10} k_j},$$

где  $k_j$  — весовой коэффициент соответствующего вопроса.

В данной методике каждому вопросу может быть назначен индивидуальный весовой коэффициент в за-

висимости от важности вопроса для определения усредненного значения коэффициента риска.

В работе [10] доказаны формулы для параметров  $\beta$  и  $\gamma$  при известном коэффициенте риска  $\alpha$ :

$$\gamma = \frac{2\alpha - 1}{\alpha}; \quad \beta = \frac{2\alpha - 1}{1 - \alpha}.$$

**Заключение.** Рассмотренная тестовая методика позволяет оценивать значение коэффициента  $\alpha$ , а также рассчитывать точечные оценки для параметров  $\beta$  и  $\gamma$ , которые могут быть использованы для расчетов полезностей решений по принятию (1) и отклонению (2) конкретного инвестиционного проекта.

### Библиографический список

1. Жариков А.В., Матюнин Е.В., Оскорбин Н.М. Подход к формализации задач поддержки принятия решений при информационных ограничениях // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2014. — № 1-2. DOI:10.14258/izvasu(2014)1.2-15  
 2. Трифионов Ю.В., Плеханова А.Ф., Юрлов Ф.Ф. Выбор эффективных решений в экономике в условиях неопределенности. — Н. Новгород, 1998.  
 3. Корпоративный менеджмент [Электронный ресурс]. — URL: <http://www.cfin.ru/finanalysis/koshechkin.shtml>.

4. Шапкин А.С., Шапкин В.А. Теория риска и моделирование рискованных ситуаций. — М., 2005.  
 5. Ван Хорн Дж. Основы управления финансами / пер. с англ. под ред. И.И. Елисейевой. — М., 1997.  
 6. Данько Е. В. Функция полезности инвестиционных проектов в условиях неопределенности // МАК-2013 : сборник тр. XVI регион. конф. по математике. — Барнаул, 2013.  
 7. Kahneman D., Tversky A. Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk // Econometrica. — 1979. — Vol. 47.

8. Tversky A., Kahneman D. The framing of decisions and the psychology of choice // *Science*. — 1981. — № 211.

9. Tversky A., Kahneman D. Loss Aversion in Riskless Choice: A Reference-Dependent Model // *The Quarterly Journal of Economics*. — 1991. — Vol. 106. — No. 4.

10. Данько Е.В. Функция субъективной полезности инвестиционных решений в условиях информационной неопределенности и метод оценки ее параметров // *Вестник Новосибирского гос. ун-та. Сер. Информационные технологии*. — 2015. — Т. 13, вып. 3.