УДК 330.16:51

# Неравновесие по Штакельбергу и динамика коллективного поведения

*Г.И. Алгазин[1], Д.Г. Алгазина[1], О.И. Пятковский[2]*

[1]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2]Алтайский государственный технический университет (Барнаул, Россия)

# Stackelberg Disequilibrium and Dynamics of Collective Behavior

*G.I. Algazin[1], D.G. Algazina[1], O.I. Pyatkovsky[2]*

[1]Altai State University (Barnaul, Russia)
[2]Polzunov Altai State Technical University (Barnaul, Russia)

Рассматривается олигополистический рынок, состоящий только из фирм Штакельберга. В классе линейных функций спроса и издержек фирм-олигополистов исследуется проблема достижения неравновесия по Штакельбергу с применением рефлексивных игр и моделей динамики коллективного поведения. Особенность проблемы состоит в том, что олигополисты при выборе объемов поставок товаров исходят из неправильного (итеративно уточняемого) представления о предельных издержках других олигополистов. В основу динамической процедуры уточнения представления о предельных издержках положена модель индикаторного (коллективного) поведения. Получены необходимые и достаточные условия сходимости, независимо от начальных представлений, динамической процедуры с постоянными и «равными» для всех фирм шагами к положению неравновесия по Штакельбергу с истинными значениями предельных издержек олигополистов. Результаты статьи показывают, что на рынке, основанном на неправильном представлении каждого из олигополистов о поведении конкурентов, можно правильно оценивать определенные их характеристики.

***Ключевые слова:*** конкурентный рынок, неравновесие по Штакельбергу, коллективное поведение, предельные издержки, уточнение представлений.

In this paper, an oligopolistic market of Stackelberg firms only is considered. The problem of achieving the Stackelberg disequilibrium using reflexive games and models of collective behavior dynamics is investigated in the class of demand and cost linear functions for oligopolistic firms. The problem peculiarity is the behavior of oligopolists that comes from incorrect (iteratively adjustable) ideas of marginal costs of other oligopolists while evaluating the scope of delivery. The model of indicator (collective) behavior is the basis of dynamic procedure of clarifying the ideas of marginal costs. The necessary and sufficient conditions for the convergence regardless of initial ideas, the dynamic procedure with constant and equal steps to the Stackelberg disequilibrium with true values of marginal costs of oligopolists for all firms are obtained. The presented results demonstrate the possibility of correct evaluation of certain characteristics of competitors for markets based on incorrect ideas of oligopolists on a behavior of competitors.

***Key words:*** competitive market, Stackelberg disequilibrium, collective behavior, marginal cost, clarifying beliefs.

**DOI 10.14258/izvasu(2017)1-11**

**Введение.** Фирма, выступившая в роли единоличного лидера на рынке Курно, существенно увеличивает за счет этого собственную прибыль. При отсутствии явного конкурентного преимущества каждая фирма стремится стать лидером, что приводит к ситуации неравновесия по Штакельбергу, названной так потому, что существует доминирующая над ней ситуация равновесия по Курно, в которой фирмы получают большие прибыли. Это обстоятельство не говорит в пользу неравновесия по Штакельбергу и указывает на целесообразность перехода от независимого выбора фирм к согласованному выбору, который привел бы их к лучшей ситуации. Видимо, поэтому сходимости моделей адаптивных динамик к неравновесию по Штакельбергу посвящено гораздо меньше исследований, чем к равновесию по Курно или равновесию по Штакельбергу. Так, для достаточно общих моделей рынка с однородным товаром, в рамки которых укладываются как частные случаи модели Штакельберга, доказано ряд теорем о существовании «неподвижных точек» в моделях адаптивных динамик [1–5]. Однако во многих случаях в этих теоремах либо не определяются области сходимости алгоритмов поиска «неподвижных точек» [1–3], либо такая сходимость анализируется для непрерывного адаптивного процесса [4, 5].

Известно, что на рынке с агентами Штакельберга каждый из них полагает, что он точно знает реакцию остальных агентов на его действия. Это предположение является априори неверным, так как каждый агент Штакельберга заблуждается относительно поведения других агентов, действующих по Штакельбергу, полагая, что они действуют по Курно. В данной работе к этим заблуждениям агентов Штакельберга добавляются в условиях современных рынков вряд ли вызывающие сомнения их неверные представления о предельных издержках конкурентов, что определяет актуальность исследования.

Цель работы — показать, что на рынке, состоящем только из агентов Штакельберга, модели коллективного поведения позволяют агентам, оставаясь неизменными в своих неверных исходных предположениях о поведении по Курно других агентов, уточнять в динамике представления об их предельных издержках и прийти в состояние неравновесия по Штакельбергу, соответствующее истинным значениям затрат конкурентов.

**Базовая модель олигополии.** На рынке присутствует $n$ фирм-агентов, конкурирующих объемами выпуска однородной продукции. Каждый агент продает произведенный им выпуск $q_i$ по единой рыночной цене $p(Q)$, которая определяется общим объемом выпуска $Q=\sum_{i=1}^{n} q_i$. Фирмы рациональны и их действия направлены на максимизацию собственной прибыли:

$$\Pi_i(p(Q),q_i)=p(Q)q_i-\phi_i(q_i)\to\max_{q_i},\quad i=1,\dots,n. \quad (1)$$

Цена $p(Q)$ и полные издержки фирм $\phi_i(q_i)$ заданы линейными функциями

$$p(Q)=a-bQ,\ \phi_i(q_i)=c_iq_i+d_i,\ i=1,\ \dots,n, \quad (2)$$

где $a$, $b$ — параметры спроса; $c_i$, $d_i$ — предельные и постоянные издержки фирм.

Кооперация фирм друг с другом и ограничения мощности отсутствуют. Оптимальный объем выпуска определяется из условия $\partial\Pi_i/\partial q_i=0$ с учетом (2)

$$q_i=\frac{h_i-Q_{-i}}{2+\partial Q_{-i}/\partial q_i}\ \text{для } i=1,\dots,n, \quad (3)$$

где использованы обозначения:

$$h_i=\frac{a-c_i}{b}, \quad (4)$$

$$Q_{-i}=\sum\nolimits_{j\neq i} q_j. \quad (5)$$

Наличие в (3) неопределенности о выпуске конкурентов определяет для каждого агента необходимость предположений о поведении конкурентов.

**Модель олигополии с агентами Штакельберга и коллективное поведение.** Агента, занимающего лидирующее положение среди остальных агентов и при выборе своего объема выпуска полагающего, что он точно знает их реакцию на его выбор, называют *фирмой Штакельберга*.

Остальные агенты максимизируют собственную прибыль, основываясь на предположении Курно о неменяющемся выпуске других агентов. Формально предположение Курно можно записать в виде условий [6, 7 и др.]

$$\partial Q_{-i}/\partial q_i=0,\quad i=1,\dots,n. \quad (6)$$

Далее будем полагать, что все фирмы действуют по Штакельбергу, т.е. каждая фирма считает, что остальные действуют по Курно. Тогда будут выполнены условия [6, 7 и др.]

$$\frac{\partial Q_{-i}}{\partial q_i}=-\frac{n-1}{n},\ \text{при } i=1,\dots,n. \quad (7)$$

Также согласно (3) и (7) имеем

$$q_i=n(h_i-Q). \quad (8)$$

Если агенты при выборе своих действий имеют правильные представления о параметрах спроса и параметрах моделей конкурентов, то с учетом (4) и (8) их выпуск и предельные издержки определяются выражениями:

$$q_i=\frac{n}{(n^2+1)b}\left(a+n\cdot\sum\nolimits_{j=1}^{n}c_j-(n^2+1)c_i\right), \quad (9)$$

$$c_i=a-b(Q+q_i/n),\ i=1,\dots,n. \quad (10)$$

В теории рефлексивных игр вектор $(q_1, q_2, \dots, q_n)$, компоненты которого соответствуют правильным представлениям каждого агента, понимается как *истинное информационное неравновесие* (или просто *неравновесие*) *по Штакельбергу* [8–10].

Перейдем к рассмотрению случая, когда агенты, выбирая свои действия, имеют неверные исходные представления о предельных издержках других агентов.

Оказывается, что в этом случае путем повторения игры агенты, наблюдая выбираемые действия, могут от игры к игре изменять свои действия и представления так, что в динамике прийти к истинному информационному неравновесию по Штакельбергу. При этом в каждой игре агенты выбирают действия однократно, одновременно и независимо.

Для построения такой динамической процедуры будем использовать *модель индикаторного поведения*, являющуюся наиболее распространенной *моделью теории коллективного (группового) поведения* [11, 12].

1. Каждый из агентов, независимо от других, рассчитывает свое действие ($q_i^{t-1}$), которое максимизировало бы его прибыль, подставляя в (9) свои собственные предельные издержки ($c_i$) и свои последние представления о предельных издержках других агентов ($c_{ij}^{t-1}$), $t$ = 1, 2, … ($c_{ij}^{0}$ считаются заданными). Учитывается, что свои собственные предельные издержки он знает точно, т.е. $c_{ii}^{t-1} = c_i$ и

$$q_i^{t-1} = \frac{n}{(n^2+1)b}\left(a + n\cdot\sum\nolimits_{j=1}^{n} c_{ij}^{t-1} - (n^2+1)c_i\right),$$

$$i = 1, \ldots, n. \qquad (11)$$

2. Каждый $i$-й агент рассчитывает свои текущие представления о предельных издержках $w_j^{t-1}$ конкурентов ($j \neq i, j = 1, \ldots, n$) из условия максимизации своей целевой функции, используя вектор действий агентов ($q_1^{t-1}, q_2^{t-1}, \ldots, q_n^{t-1}$) и полагая, что в текущем $t$-м периоде все агенты выберут те же действия, как и в предыдущем $t$-1-м периоде:

$$w_j^{t-1} = a - b(\sum\nolimits_{i=1}^{n} q_i^{t-1} + q_j^{t-1}/n). \qquad (12)$$

Представления $w_j^{t-1}$ будут одинаковы для разных агентов, поскольку все они наблюдают одни и те же действия.

Вектор объемов выпуска ($q_1^{t-1}, q_2^{t-1}, \ldots, q_n^{t-1}$) определяет в $t$-1-м периоде *текущее информационное неравновесие по Штакельбергу*, так как отражает рациональное поведение агентов. Каждый из них стремится выбором собственного выпуска ($q_i^{t-1}$) максимизировать свою целевую функцию (1) при предположении Курно (6) о действиях других агентов в рамках своих представлений ($w_j^{t-1}$) о предельных издержках агентов и имеющейся у него достоверной информации о параметрах функции спроса ($a$, $b$) и своей функции затрат ($c_i$, $d_i$).

3. В соответствии с моделью индикаторного поведения каждый $i$-й агент изменяет свои представления за предыдущий $t$-1-й период о предельных издержках $j$-го агента, делая от них шаг по направлению к $w_j^{t-1}$ по формуле

$$c_{ij}^{t} = c_{ij}^{t-1} + \gamma_i^t (w_j^{t-1} - c_{ij}^{t-1}), \qquad (13)$$

где $\gamma_i^t \in [0;1]$ — параметры, определяющие величины шагов.

Затем процесс повторяется с п. 1.

Параметры $\gamma_i^t$ играют большую роль для сходимости динамики коллективного поведения. Покажем ниже, что для исследуемой модели олигополии при определенных значениях этих параметров равновесие динамики коллективного поведения будет являться неравновесием по Штакельбергу.

Из формул (9), (11) и (12) получаем следующие преобразования формальных выражений для объемов выпуска (с учетом выражений для предельных издержек агентов в состоянии текущего информационного неравновесия ($w_j^t$) и текущих представлений агентов о предельных издержках конкурентов ($c_{ij}^t$)):

$$q_i^t = \gamma_i^{t+1} q_i^t + \left(1-\gamma_i^{t+1}\right) q_i^t = \frac{n\gamma_i^{t+1}}{(n^2+1)b}\cdot$$

$$\cdot\left(a + n\sum\nolimits_{j\neq i}^{n} w_j^t - (n^2-n+1)w_i^t\right) +$$

$$+\frac{n\left(1-\gamma_i^{t+1}\right)}{(n^2+1)b}\left(a + n\sum\nolimits_{j\neq i}^{n} c_{ij}^t - (n^2-n+1)c_i\right);$$

$$q_i^t = q_i^{t+1} + \frac{n(n^2-n+1)\gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right)}{(n^2+1)b}. \qquad (14)$$

Из формул (4) и (8) имеем

$$Q^t + \frac{q_i^t}{n} + \frac{w_i^t}{b} = Q + \frac{q}{n} + \frac{c_i}{b} = \frac{a}{b}. \qquad (15)$$

Из (14) и (15) имеем

$$Q^t = Q^{t+1} + \frac{n(n^2-n+1)\sum\nolimits_{j=1}^{n}\gamma_j^{t+1}\left(c_j - w_j^t\right)}{(n^2+1)b},$$

$$Q^t \quad = Q^t + \frac{w_i^t \quad w_i^t}{} + \frac{(n^2-n+1)\ {}_i^{t\ \ 1}\left(c_i - w_i^t\right)}{(n \quad 1)b}$$

Из последних двух равенств получаем

$$w_i^{t+1} = w_i^t + \frac{n^2-n+1}{n^2+1}\cdot$$

$$\cdot\left[\gamma_i^{t+1}\left(c_i - w_i^t\right) + n\sum\nolimits_{j=1}^{n}\gamma_j^{t+1}\left(c_j - w_j^t\right)\right]. \qquad (16)$$

Далее рассмотрим частный случай, когда $\gamma_i^t \equiv \gamma$ для $i$ = 1, …, $n$ и $t$ = 1, 2, …, . Тогда из (16)

$$w_j^{t+1} - w_i^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma(n^2-n+1)}{n^2+1}\right)(w_j^t - w_i^t) +$$

$$+\frac{\gamma(n^2-n+1)}{n^2+1}(c_j - c_i).$$

Преобразуем последнее равенство:

$$w_j^{t+1} - w_i^{t+1} = (w_j^0 - w_i^0)\left(1 - \frac{\gamma(n^2-n+1)}{n^2+1}\right)^{t+1} +$$
$$+(c_j - c_i)\frac{\gamma(n^2-n+1)}{n^2+1}\sum_{t=0}^{t}\left(1 - \frac{\gamma(n^2-n+1)}{n^2+1}\right)^{t} =$$
$$= (w_j^0 - w_i^0)\left(1 - \frac{\gamma(n^2-n+1)}{n^2+1}\right)^{t+1} +$$
$$+(c_j - c_i) - (c_j - c_i)\left(1 - \frac{\gamma(n^2-n+1)}{n^2+1}\right)^{t}.$$

Поэтому выполнение неравенства

$\left|1 - \frac{\gamma(n^2-n+1)}{n^2+1}\right| < 1$ является необходимым и достаточным условием, чтобы для любых двух агентов $i$ и $j$ разность $w_i^t$–$w_j^t$ сходилась к $c_i$–$c_j$ независимо от начальных представлений. Это неравенство имеет место при любом $\gamma \in (0, 1]$. Из (16) получаем

$$W^{t+1} = W^t + (n^2-n+1)\sum_{j=1}^{n}\gamma_j^{t+1}\left(c_j - w_j^t\right) =$$
$$= (1-(n^2-n+1)\gamma)W^t + (n^2-n+1)\gamma C.$$

Или
$$W^{t+1} = (1-(n^2-n+1)\gamma)^{t+1}W^0 +$$
$$+C - C(1-(n^2-n+1)\gamma)^t.$$

Для сходимости последовательности $W^t$ к $C$ (суммарным истинным значениям издержек) необходимо и достаточно выполнение неравенства $\left|1-(n^2-n+1)\gamma\right| < 1$. Оно будет выполнено, если $\gamma \in (0, 2 / (n^2 - n + 1))$.

Сходимость $w_i^t$ к $c_i$ следует из сходимости при $\gamma \in (0, 2 / (n^2 - n + 1))$ суммы сходящихся последовательностей, так как $nw_i^t = W^t + \sum_{j\neq i}^{n}\left(w_i^t - w_j^t\right)$.

При невыполнении условия $\gamma \in (0, 2 / (n^2 - n + 1))$ предельные издержки агентов в состоянии текущего информационного неравновесия по Штакельбергу не могут сходиться к их истинным значениям, поскольку ряд $W_1^t$ либо сходится к $W_{-1}^0$ (при $\left|1-(n^2-n+1)\gamma\right| = 1$), либо расходится (при $\left|1-(n^2-n+1)\gamma\right| > 1$ ).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

***Утверждение.*** В модели рынка с агентами Штакельберга для того, чтобы динамическая процедура уточнения представлений агентов о предельных издержках конкурентов при равных значениях параметров $\gamma_i^t \equiv \gamma$ ($i = 1, \ldots, n$; $n > 1$; $t = 1, 2, \ldots$,) сходилась к истинному неравновесию по Штакельбергу, необходимо и достаточно выполнение условия $\gamma \in (0, 2 / (n^2 - n + 1))$.

**Заключение.** Приведенная динамическая модель рефлексивного поведения позволяет описывать и прогнозировать взаимодействия на конкурентном рынке агентов, действующих по Штакельбергу, при отсутствии у них общего знания. Теоретическую основу подхода составляют теория игр и теория коллективного поведения, а также их применение для исследования поведения разноинформированных рациональных агентов, имеющих неверные исходные представления о поведении и предельных издержках конкурентов. Получены необходимые и достаточные условия сходимости динамических процедур с постоянными и «равными» для всех агентов шагами к истинному положению неравновесия по Штакельбергу. При этом сходимость процедур гарантируется: 1) независимо от начальных представлений агентов; 2) при постоянстве длины шага в отличие от обычных для итеративных методов условий, предполагающих стремление к нулю длины шага по мере приближения к решению.

Перспективными видятся исследования, направленные на получение аналитических оценок ограничений на параметры динамических процедур, обеспечивающих в общем случае сходимость процессов к положению неравновесия по Штакельбергу.

## Библиографический список

1. Васин А.А. Модели динамики коллективного поведения. — М., 1989.

2. Новиков Д.А. Динамика поведения систем с большим числом целенаправленных элементов // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 2.

3. Puu T. Attractors, Difurcations, & Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics. — Berlin Heidelberg, 2003.

4. Васин А.А., Васина П.А., Рулева П.Ю. Об организации рынков однородных товаров // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 1.

5. Булавский В.А., Калашников В.В. Метод однопараметрической прогонки для исследования состояния равновесия // Экономика и математические методы. — 1994. — Т. 30, № 4.

6. Алгазина Д.Г., Алгазин Г.И. Модельные исследования сетевого взаимодействия на конкурентных рынках с нефиксированными ролями участников. — Барнаул, 2015.

7. Дюсуше О.М. Статическое равновесие Курно-Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек // Экономический журнал ВШЭ. — 2006. — № 1.

8. Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г. Истинное и ложное информационное равновесие в модели торговой системы // Управление большими системами. — 2016. — № 60.

9. Novikov D., Chkhartishvili A. Reflexion and Control: Mathematical Models. — London, 2014.

10. Sakovics J. Games of incomplete information without common knowledge priors // Theory and decision. — 2001. — №.50.

11. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. — М., 1977.

12. Новиков Д.А. Модели стратегической рефлексии // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 1.