

## Об одной модели бутылки Клейна

М.А. Чешкова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

## On a Model of the Klein Bottle

M.A. Cheshkova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Если вдоль некоторой замкнутой кривой на поверхности локальная ориентация в касательном пространстве меняет знак, то поверхность называется односторонней. Простейшей односторонней поверхностью является лист Мебиуса. К односторонним поверхностям относится также бутылка Клейна, скрещенный колпак. Бутылку Клейна можно рассматривать как два листа Мебиуса, склеенные по краю.

Пусть на торе в  $E^3$  задана замкнутая кривая с помощью  $4\pi$ -периодической вектор-функции. Используя найденную функцию, определяются уравнения листов Мебиуса, бутылки Клейна. Если средняя линия одного из листов Мебиуса вырождается в точку, то получим скрещенный колпак.

Бутылка Клейна в  $E^3$  имеет самопересечение. В работе бутылка Клейна разрезается на два листа Мебиуса. По крайней мере, один из листов Мебиуса имеет самопересечение. В работе также строится перекрученная бутылка Клейна и разрезается на два перекрученных листа Мебиуса. С помощью системы компьютерной математики строятся рассматриваемые поверхности.

**Ключевые слова:** бутылка Клейна, лист Мебиуса, тор,  $4\pi$ -периодическая функция.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-32

**Введение.** Если на поверхности в  $E^n$  существует замкнутая кривая (дезориентирующий контур), обладающая тем свойством, что при ее обходе локальная ориентация в касательном пространстве меняет знак, то поверхность называется односторонней.

Впервые уравнение односторонней поверхности в  $E^3$ , открытой Мебиусом, было получено Н. Mashke [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2].

К односторонним поверхностям относятся: скрещенный колпак [3], бутылка Клейна [3–5]. В [6] исследуется плоский лист Мебиуса.

The surface is called a one-sided surface if the tangent space local orientation changes sign along a closed curve on a surface. The Mobius strip is the simplest one-sided surface. Klein bottle and cross cap are also one-sided surfaces. The Klein bottle can be considered as two Mobius strips glued together at the edge.

In this paper, the Klein bottle is cut into two Mobius strips. The Klein bottle in  $E^3$  has self-intersection. A closed curve is defined on a torus in  $E^3$  using  $4\pi$ -periodic vector-function. Equations for Mobius strips and Klein bottle are derived using the defined curve function. If a midline of Mobius strips degenerates into a point, we get cross-cap. Also, a twisted Klein bottle and two twisted Mobius strips are constructed with a mathematical software package.

**Key words:** Klein bottle, Mobius band, torus,  $4\pi$ -periodic function.

**1. Основные формулы.** В евклидовом пространстве  $E^n$  рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую  $\gamma$  без самопересечения, заданную  $4\pi$ -периодической вектор-функцией  $\rho = \rho(v)$ , которая не является  $2\pi$ -периодической и  $2\pi$ -антипериодической.

Так как  $\rho(v) = \rho(v + 4\pi)$ , то функция

$$s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho(v + 2\pi)), \quad (1)$$

есть  $2\pi$ -периодическая не равная нулю, а вектор-функция

$$l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho(v + 2\pi)) \quad (2)$$

есть  $2\pi$ -антипериодическая не равная нулю.

Рассмотрим замкнутую поверхность  $K$ :

$$r(u, v) = (p + \cos(u))s(v) + \sin(u)l(v), \quad p \neq \mp 1, \quad (3)$$

$$u \in [-\pi, \pi], \quad v \in [-\pi, \pi].$$

**Теорема 1.** Поверхность  $K$  односторонняя.

**Доказательство.** Рассмотрим замкнутую кривую (дезорентирующий контур)

$$r(0, v) = (p + 1)s(v).$$

$$r_1 = r_u|_{u=0} = l(v),$$

$$r_2 = r_v|_{u=0} = (p + 1)s'(v).$$

Касательное пространство в точках кривой  $S : r(0, v) = (p + 1)s(v)$  примет вид

$$T_m K = \{l(v), s'(v)\}, \quad m \subset S.$$

Замечаем, что базисы

$$\{r_1(v), r_2(v)\} = \{l(v), s'(v)\},$$

$$\{r_1(v + 2\pi), r_2(v + 2\pi)\} = \{l(v + 2\pi), s'(v + 2\pi)\}$$

противоположно ориентированы. Поверхность односторонняя.

Нетрудно проверить, что и вдоль замкнутой кривой  $S^* : r(\pi, v) = (p - 1)s(v)$  локальные базисы также меняют ориентацию.

**Теорема 2.** Формула  $r(u, v) = (p + \cos(u)) \cdot s(v) + \sin(u)l(v)$ ,  $p \neq \mp 1$ ,  $u \in [-\pi, \pi]$ ,  $v \in [-\pi, \pi]$  определяет модель бутылки Клейна.

**Доказательство.** Рассмотрим бутылку Клейна как фактор-пространство [7, с. 75]:

$$K^* = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] / [(-\pi, v) \sim (\pi, v), (-u, -\pi) \sim (u, \pi)].$$

Действительно,  $r(-\pi, v) = (p - 1)s(v) = r(\pi, v)$ ,  $r(-u, -\pi) = (p + \cos(-u))s(-\pi) + \sin(-u)l(-\pi) = (p + \cos(-u))s(\pi) - \sin(-u) \cdot l(\pi) = r(u, \pi)$ .

**Замечание 1.** Если  $p + 1 = 0$  ( $p - 1 = 0$ ), то средняя линия  $S : r = (p + 1)s(v)$  ( $S^* : r(\pi, v) = (p - 1)s(v)$ ) вырождается в точку. Один из листов Мебиуса вырождается в конус, гомеоморфный сфере с дыркой. Поверхность (3) в этом случае гомеоморфна сфере с дыркой, заклеенной листом Мебиуса. Имеем модель проективной плоскости [7, с. 25]. В  $E^3$  такая модель называется скрещенным колпаком [3, с. 304].

Поверхность Клейна можно получить, «склеив» два листа Мебиуса по краю. Так как бутылка Клейна в  $E^3$  имеет самопересечение, то, по крайней мере, один из листов имеет самопересечение.

Рассмотрим кривую  $r = r(u_0, v)$ ,  $v \in [-2\pi, 2\pi]$  на  $K$  и разрежем  $K$  вдоль нее.

Получили лист Мебиуса  $K1$  (криволинейный)

$$r(u, v) = (p + \cos(u))s(v) + \sin(u)l(v), \quad (4)$$

$$u \in [-u_0, u_0], \quad v \in [-\pi, \pi].$$

Для листа  $K1$  средней линией является линия  $S : r = (p + 1)s(v)$ , а краем — кривая  $r = r(u_0, v)$ ,  $v \in [-2\pi, 2\pi]$ .

Второй лист  $K2$  задается уравнением

$$r(u, v) = (p + \cos(u))s(v) + \sin(u)l(v), \quad (5)$$

$$u \in [-u_0, 2\pi - u_0], \quad v \in [-\pi, \pi]$$

Для листа  $K2$  средней линией является линия  $S^* : r(\pi, v) = (p - 1)s(v)$ . Край листа  $K1$  совпадает с краем листа  $K2$ .

**Построение поверхностей  $K$ ,  $K1$ ,  $K2$ .** Будем строить поверхности  $K$ ,  $K1$ ,  $K2$  в  $E^3$ . Рассмотрим тор в  $E^3$ :

$$r(u, v) = ((a + b \cos(u)) \cos(v), (a + b \cos(u)) \sin(v), b \sin(u)). \quad (6)$$

Зададим линию  $u = kv/2$ , где  $k$  — нечетное число.

Тогда вектор-функция

$$\rho(v) = ((a + b \cos(kv/2)) \cos(v), (a + b \cos(kv/2)) \sin(v), b \sin(kv/2)), \quad v \in [-2\pi, 2\pi] \quad (7)$$

есть обмотка тора.

Построим тор и кривую на нем при  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $k = 1$  (рис. 1),  $k = 3$  (рис. 2).

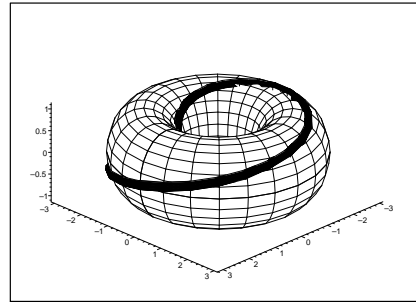


Рис. 1. Тор и обмотка тора,  $k = 1$

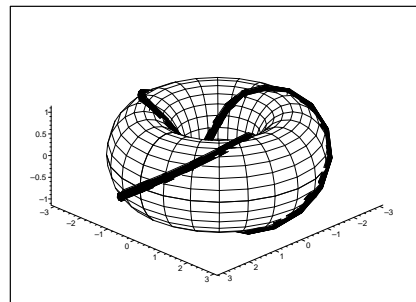


Рис. 2. Тор и обмотка тора,  $k = 3$

Имеем

$$s(v) = (2 \cos(v), 2 \sin(v), 0), \quad (8)$$

$$l(v) = (\cos(kv/2) \cos(v), \cos(kv/2) \sin(v), \sin(kv/2)). \quad (9)$$

Уравнение поверхности  $K$  при  $p = 3$  примет вид

$$r(u, v) = (2(3 + \cos(u)) \cos(v) + \sin(u) \cos(kv/2) \cos(v), 2(3 + \cos(u)) \sin(v) + \sin(u) \cos(kv/2) \sin(v), \sin(kv/2)),$$

$$u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi].$$

Построим поверхность  $K$  (рис. 3), полагая  $k = 1$ .

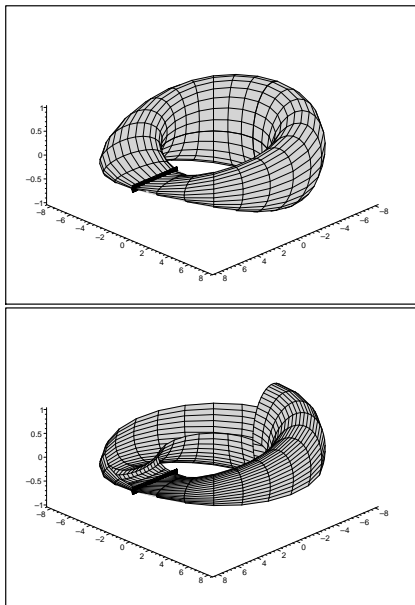


Рис. 3. Поверхность  $K$  и ее фрагмент

Построим поверхности  $K1, K2$  (рис. 4).

Рассмотрим кривую  $r = r(\pi/4, v)$ ,  $v = [-2\pi, 2\pi]$  и разрежем  $K$  вдоль нее. Для поверхности  $K1$  полагаем  $u \in [-\pi/4, \pi/4]$ ,  $v \in [-\pi, \pi]$ . Для поверхности  $K2$  полагаем  $u \in [\pi/4, 2\pi - \pi/4]$ ,  $v \in [-\pi, \pi]$ . Построим листы Мебиуса  $K1, K2$  (рис. 4) и склеим их (рис. 5).

Замечаем, что лист  $K1$  не имеет самопересечения,  $K2$  – лист с самопересечением. Построим пример, когда  $p$  отрицательное число. Полагаем  $p = -3$  и рассмотрим кривую  $r = r(\pi/4, v)$ ,  $v = [-2\pi, 2\pi]$  и разрежем  $K$  вдоль нее. Для поверхности  $K1$  полагаем  $u \in [-\pi/4, \pi/4]$ ,  $v \in [-\pi, \pi]$ . Для поверхности  $K2$  полагаем  $u \in [\pi/4, 2\pi - \pi/4]$ ,  $v \in [-\pi, \pi]$ . Построим листы Мебиуса  $K1, K2$  (рис. 6) и склеим их (рис. 7).

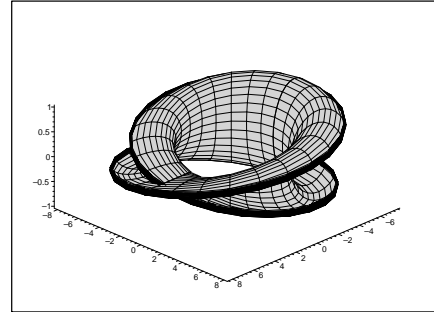
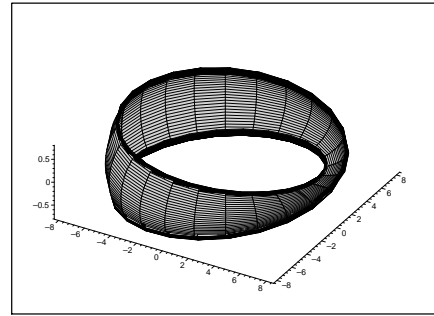


Рис. 4. Листы Мебиуса  $K1, K2$ ,  $p = 3$

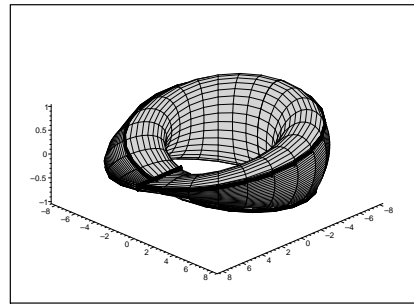


Рис. 5. Склеенные  $K1, K2$ ,  $p = 3$

## 2. Построение перекрученных поверхностей $K, K1, K2$

Зададим линию  $u = 3v/2$  на торе.

Тогда вектор-функция

$$\rho(v) = ((2 + \cos(3v/2)) \cos(v), (2 + \cos(3v/2)) \sin(v), \sin(3v/2)) \quad (10)$$

$$v \in [-2\pi, 2\pi].$$

есть обмотка тора (рис. 2).

Имеем:

$$s(v) = (2 \cos(v), 2 \sin(v), 0), \quad (11)$$

$$l(v) = (\cos(3v/2) \cos(v), \cos(3v/2) \sin(v), \sin(3v/2)). \quad (12)$$

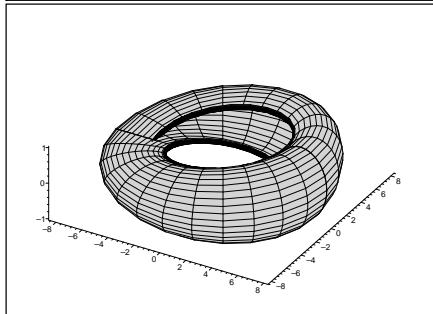
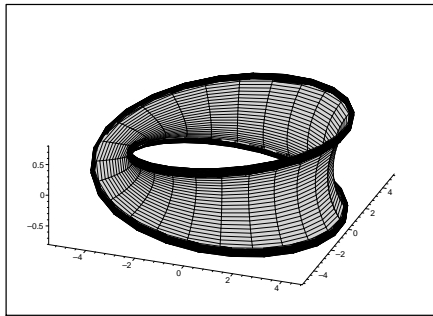


Рис. 6. Два листа Мебиуса,  $p = -3$

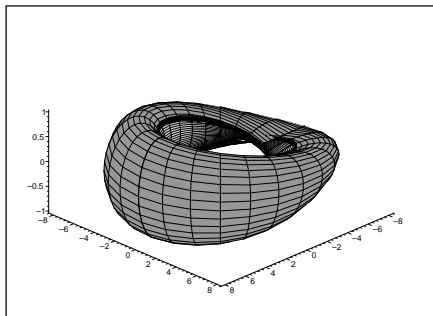


Рис. 7. Склеенные листы Мебиуса,  $p = -3$

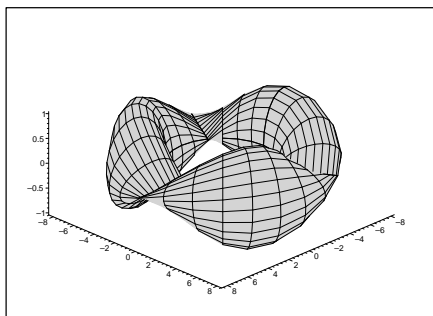


Рис. 8. Перекрученная поверхность  $K$

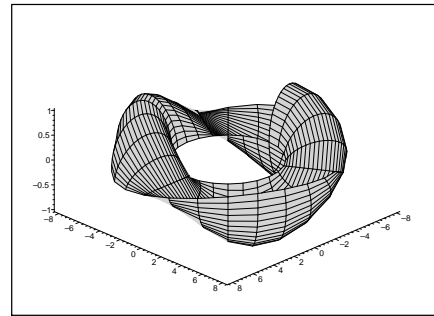


Рис. 9. Перекрученная поверхность  $K$ , фрагмент

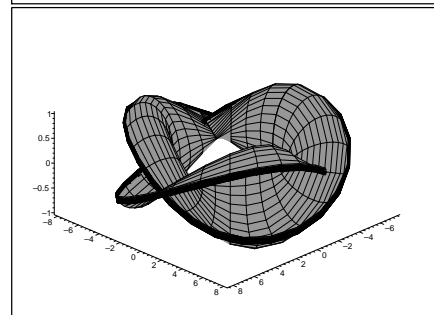
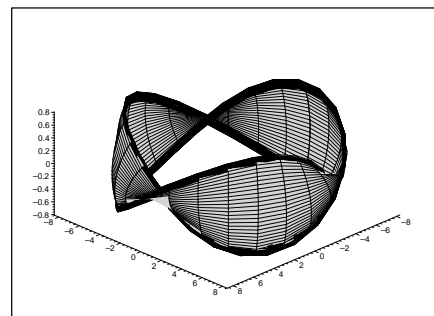


Рис. 10. Перекрученные листы Мебиуса  $K1, K2$

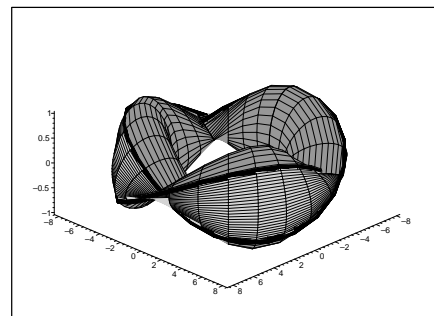


Рис. 11. Склеенные перекрученные листы Мебиуса

Если в уравнении обмотки тора полагаем нечетное  $k > 1$ , то построенные поверхности будут перекрученными  $k$  раз.

Уравнение перекрученной поверхности  $K$  примет вид

$$\begin{aligned} r(u, v) = & (2(3 + \cos(u)) \cos(v) + \\ & + \sin(u) \cos(3v/2) \cos(v), \\ & 2(3 + \cos(u)) \sin(v) + \\ & + \sin(u) \cos(3v/2) \sin(v), \sin(3v/2)). \\ u = & -\pi, \dots, \pi, \quad v = -\pi, \dots, \pi. \end{aligned}$$

Построим перекрученную поверхность  $K$  (рис. 8, 9).

Построим перекрученные поверхности  $K1, K2$ .

Рассмотрим кривую  $r = r(\pi/4, v)$ ,  $v \in [-2\pi, 2\pi]$  и разрежем  $K$  вдоль нее. Для поверхности  $K1$  полагаем  $u \in [-\pi/4, \pi/4]$ ,  $v \in [-\pi, \pi]$ . Для поверхности  $K2$  полагаем  $u \in [\pi/4, 2\pi - \pi/4]$ ,  $v \in [-\pi, \pi]$ . Построим перекрученные листы Мебиуса  $K1, K2$  (рис. 10) и склеим их (рис. 11).

**Замечание 2.** Кроме того, односторонние поверхности и их приложения рассматриваются в работах [8-15].

### Библиографический список

1. Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Soc. — 1900. — V. 1, № 1.
2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. — 2007. — Т. 71, № 5.
3. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. — М., 2006.
4. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М., 1981.
5. Чешкова М.А. О бутылке Клейна // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2012. — № 1/1 (73).
6. Чешкова М.А. О плоском листе Мебиуса // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2013. — № 1/2 (77). DOI: 10.14258/izvasu(2013)1.2-09.
7. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. — М., 1995.
8. Борисюк А.Р. Глобальные бифуркации на бутылке Клейна. Общий случай // Математический сборник. — 2005. — Т. 196, № 4.
9. Набеева Л.Р. Классификация узлов в утолщенной бутылке Клейна // Вестник Челябинского государственного университета. — 2012. — № 26 (280).
10. Карпухин М.А. Немаксимальность экстремальных метрик на торе и бутылке Клейна // Математический сборник. — 2013. — Т. 204, № 12.
11. Журавлев В.Г. Множества ограниченного остатка на двулистной накрывающей бутылки Клейна // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. — 2014. — Т. 429, № 29.
12. Немировский С.Ю. Гомологический класс лагранжевой бутылки Клейна // Известия РАН. Серия математическая. — 2009. — Т. 73, № 4.
13. Шевчишин В.В. Лагранжевы вложения бутылки Клейна и комбинаторные свойства группы классов отображений // Известия РАН. Серия математическая. — 2009. — Т. 73, № 4.
14. Козлов И.К. Классификация лагранжевых расслоений // Математический сборник. — 2010. — Т. 201, № 11.
15. Шалагинов М.Ю., Иванов М.Г., Долгополов М.В. Задачи с оператором Лапласа на топологических поверхностях // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. — 2011. — № 2.