

## Исследование аэродинамики в окрестности листа растения с учетом опушения методом гомогенизации Аллера — Бриана\*

*С.А. Саженьков<sup>1,2,3</sup>, Е.В. Шибанова<sup>1,3</sup>*

<sup>1</sup> Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, Россия)

<sup>2</sup> Институт цитологии и генетики СО РАН (Новосибирск, Россия)

<sup>3</sup> Новосибирский государственный университет (Новосибирск, Россия)

## Allaire — Briane Homogenization Method for Studying Aerodynamics Around a Plant Leaf with Trichomes

*S.A. Sazhenkov<sup>1,2,3</sup>, E.V. Shibanova<sup>1,3</sup>*

<sup>1</sup> Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the RAS (Novosibirsk, Russia)

<sup>2</sup> Institute of Cytology and Genetics of the Siberian Branch of the RAS (Novosibirsk, Russia)

<sup>3</sup> Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russia)

Проводится построение новой математической модели течения воздушных потоков у поверхности листа растения с учетом опушения, т.е. наличия трихом на поверхности листа. Лист моделируется как упругая пластинка с часто расположенными и жестко скрепленными с ней упругими цилиндрами малого диаметра и конечной высоты. Цилиндры моделируют трихомы, т.е. волоски (ворсинки) на поверхности листа, которые бывают двух видов: более часто расположенные тонкие низкие и менее часто расположенные толстые высокие. Рассматривается процесс обтекания листа вязким сжимаемым газом (воздухом). Возникает вопрос о построении усредненной модели, в рамках которой не требуется рассматривать каждую отдельную трихому, а можно определить гомогенное поле скоростей частиц воздуха на макроскопическом масштабе, т.е. на масштабе всего листа. В настоящей работе методом гомогенизации Аллера — Бриана конструируется трехмасштабная трехскоростная усредненная модель. Ее решением служат распределения скоростей на макро-, мезо- и микроскопическом масштабах.

**Ключевые слова:** гомогенизация Аллера — Бриана, уравнения Стокса, уравнения Ламэ, биомеханика листа растения.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-31

A new mathematical model describing airflow near a plant leaf surface with trichomes is elaborated. The leaf is modeled as an elastic plate with closely placed and rigidly attached elastic cylinders. The cylinders have small diameters and finite heights. They model trichomes, i.e., fibers on the leaf surface. We suppose that there are two distinct types of trichomes on the leaf surface: closely placed thin and short ones and sparse thick and long ones. Flow of a viscous compressible fluid (air) around the leaf is considered. It is strongly desirable to derive a homogenized model that would allow us to find velocities distribution of air particles on the macroscopic scale, i.e., on the whole leaf without consideration of distinct trichomes. In the paper, such model is elaborated by systematic use of the Allaire — Briane homogenization method. It appears to be a three-scale three-velocity homogenized model describing velocity distributions on macro-, meso-, and microscopic scales.

**Key words:** Allaire — Briane homogenization, Stokes equations, Lamé's equations, biomechanics of a plant leaf.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-14-00734 «Изучение молекулярных механизмов развития органов растений методами системной биологии».

Работа посвящена построению новой математической модели для описания воздушных потоков у поверхности листа растения с учетом опушения. Естественным образом решение такой за-

дачи лежит в области механики сплошных сред, то есть лист уместно моделировать как упругую или абсолютно твердую пластинку с тонкими выступами, обтекаемую сжимаемым или идеальным газом (воздухом).

Очень простой и вместе с этим весьма востребованной является модель, предложенная в монографии С. Голдстейна [1]. В этой модели рассматривается процесс обтекания воздухом тонкой пластины с одним штырем, перпендикулярно приваренным к пластине. Считается, что воздух набегает на пластину параллельно ей. Дается ответ на вопрос, при каких условиях поток воздуха остается ламинарным после прохождения около штыря. Истоки этой модели лежат в области аэродинамики, более точно — в теории крыла летательного аппарата, что напрямую не имеет отношения к моделированию биологических процессов. Тем не менее в ряде работ, например, М. Шройдера и соавторов [2], авторам удалось адаптировать модель из [1] к изучению течения воздуха в окрестности листа с трихомами одинаковой высоты. В общем случае трихомы представляют собой волоски (ворсинки) различной формы и высоты на эпителии листа растения. В [2] проведены численные расчеты для некоторых растений, которые в рамках модели позволяют определить, при каких силе ветра и высоте трихом течение воздуха около листа остается ламинарным. Эти расчеты проведены посредством конечных явных алгебраических формул, поэтому применение даже простейших численных методов не потребовалось. Стоит отметить, что турбулентные режимы в рамках этой модели изучать невозможно.

Более современной и гораздо более перспективной, чем [2], является работа К.-Х. Хоффманна и соавторов [3]. В этом исследовании рассматривается механическая система, описывающая взаимодействие упругой пластины с достаточно часто расположенными на ней упругими цилиндрами малого диаметра и одинаковой фиксированной высоты. Проведена гомогенизация этой системы, то есть получена модель, в рамках которой отдельные цилиндры не различаются, а описывается эффективное течение воздуха в окрестности пластины. Гомогенизация проведена и математически строго обоснована с помощью метода двухмасштабной сходимости Аллера — Нгуэсенса [4, 5], являющегося достаточно глубоким методом математического анализа. В [3] проведены численные эксперименты с помощью вычислительных пакетов, разработанных в CAESAR (Center of Advanced European Studies and Research, Bonn, Germany). Найдены величины эффективных коэффициентов модели. Вообще, эта модель выведена исходя из достаточно общих положений и поэтому может быть при-

менена для описания как ламинарных, так и турбулентных процессов.

В рамках данной статьи построение новой математической модели базируется на идеях из [3]. Ключевым вопросом в исследовании является вопрос о возможности математического описания аэродинамики вблизи поверхности листа в случае трихом различной высоты. Модель, рассмотренная в [3], допускает естественное обобщение на случай, когда количество высоких и низких трихом имеет одинаковый порядок. Скажем, на одной единице площади расположена одна высокая и три низкие трихомы. Вместе с тем в ряде работ, посвященных описанию строения листа растений, например, в статье М.А. Генаева и соавторов [6], замечено, что количество трихом разной высоты имеет разные порядки, то есть на одну высокую трихому на единицу площади листа приходится много низких трихом. Поэтому целесообразно провести построение более общей модели, чем в [3]. В настоящей статье в п. 3–4 из исходной модели, поставленной на микроскопическом уровне (задача А в п. 1), методом гомогенизации Аллера — Бриана выводится замкнутая корректная усредненная трехмасштабная трехскоростная модель — задача Б в п. 5, — позволяющая учитывать сложную иерархическую структуру трихом. Построение этой модели является главным результатом статьи.

**1. Постановка исходной задачи.** Рассматривается линеаризованная модель динамики совместного движения упругой пластины (листа растения с трихомами) с вязким сжимаемым газом (воздухом). Трихомы моделируются как упругие цилиндры, достаточно часто расположенные на гладкой поверхности пластины. Предполагается наличие цилиндров двух размеров: цилиндры меньшей высоты и меньшего диаметра расположены на порядок или несколько порядков чаще, чем цилиндры большей высоты и большего диаметра. Высоты цилиндров считаются фиксированными и принимают два значения. Диаметры цилиндров зависят от малого параметра  $\varepsilon > 0$ . (Смысл параметра  $\varepsilon$  будет пояснен подробно в п. 3.)

Точная постановка исходной модели сформулирована в [3, section 2.1]. Она заключается в следующем.

**Задача А.** Пусть  $\Omega$  — единичный куб в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Omega = (0, 1)^3$ . Считаем, что область  $\Omega$  разбита на две подобласти  $\Omega_F$  и  $\Omega_S$  и границу между ними,  $\Gamma = \bar{\Omega}_F \cap \bar{\Omega}_S$ . Воздух занимает объем  $\Omega_F$ , лист с трихомами занимает объем  $\Omega_S$ .

Движение воздуха описывается нестационарными уравнениями Стокса динамики слабосжимаемой вязкой жидкости:

$$\rho_F \vec{u}_t = -\nabla_x p + \operatorname{div}_x(\mathbb{P} \nabla_x \vec{u}) + \rho_F \vec{g},$$

$$\vec{x} \in \Omega_F, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\gamma p_t = -\operatorname{div}_x \vec{u}, \quad \vec{x} \in \Omega_F, \quad t > 0. \quad (2)$$

Движение листа описывается классическими уравнениями Ламэ

$$\rho_S \vec{v}_{tt} = \operatorname{div}_x(\mathbb{G} \nabla_x \vec{v}) + \rho_S \vec{g}, \quad \vec{x} \in \Omega_S, \quad t > 0. \quad (3)$$

На поверхности листа и трихом выполняется условие непрерывности скоростей

$$\vec{v}_t = \vec{u}, \quad \vec{x} \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (4)$$

и условие непрерывности напряжений (то есть третий закон Ньютона)

$$\mathbb{G} \nabla_x \vec{v} \cdot \vec{n} = (-p \mathbb{I} + \mathbb{P} \nabla_x \vec{u}) \cdot \vec{n}, \quad \vec{x} \in \Gamma, \quad t > 0. \quad (5)$$

В системе уравнений и условий на поверхности  $\Gamma$  искомыми являются поле скоростей  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$  в воздушном потоке, поле перемещений  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  частиц листа с трихомами и распределение давлений  $p = p(\vec{x}, t)$  в воздушном потоке.

Модель замыкается заданием начальных условий (при  $t = 0$ ) и условий на фиксированной границе  $\partial\Omega$ :

$$\vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_*^0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega_F, \quad (6)$$

$$p|_{t=0} = p^0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega_F, \quad (7)$$

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_*^0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega_S, \quad (8)$$

$$\vec{v}_t|_{t=0} = \vec{w}_*^0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega_S, \quad (9)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}^*(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_F, \quad t > 0, \quad (10)$$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_S, \quad t > 0. \quad (11)$$

В уравнениях задачи А используются следующие обозначения:  $\vec{n}$  — вектор единичной нормали к поверхности  $\Gamma$ , направленный в сторону области  $\Omega_F$ ;  $\rho_F$  и  $\rho_S$  — заданные средние постоянные значения плотности воздуха и листа растения;  $\vec{g}$  — заданный вектор внешних распределенных массовых сил, то есть ускорение свободного падения;  $\gamma$  — заданный положительный коэффициент сжимаемости воздуха;  $\mathbb{P}$  — тензор вязких напряжений в воздухе, определенный формулой

$$\mathbb{P} \nabla_x \vec{u} = (\lambda \operatorname{div}_x \vec{u}) \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{D}_x(\vec{u}), \quad (12)$$

где  $\mathbb{I}$  — единичная матрица,  $\mathbb{D}_x(\vec{u})$  — тензор скоростей деформации с компонентами

$$\mathbb{D}_{xij}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right);$$

$\lambda$  и  $\mu$  — постоянные заданные коэффициенты объемной и динамической вязкости;  $\mathbb{G} = (\mathbb{G}_{ijkl})$  —

заданный тензор упругости в  $\Omega_S$ , определенный формулой

$$(\mathbb{G} \nabla_x \vec{v})_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \mathbb{G}_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}, \quad (13)$$

имеющий постоянные компоненты  $\mathbb{G}_{ijkl}$  и удовлетворяющий условию симметричности

$$\mathbb{G}_{ijkl} = \mathbb{G}_{ijlk} = \mathbb{G}_{klij} = \mathbb{G}_{jilk},$$

$$i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (14)$$

и условию положительной определенности

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 \mathbb{G}_{ijkl} X_{kl} X_{ij} \geq 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (15a)$$

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 \mathbb{G}_{ijkl} X_{kl} X_{ij} = 0 \Leftrightarrow X_{kl} + X_{lk} = 0,$$

$$k, l = 1, 2, 3. \quad (15b)$$

Условия (14) и (15) хорошо согласуются с фундаментальными принципами ньютоновской механики.

**2. Унифицированная постановка задачи А.** Введем в рассмотрение оператор взятия первообразной:

$$J_t \vec{w} = \int_0^t \vec{w}(s) ds. \quad (16)$$

Тогда уравнение (3) можно переписать в виде

$$\rho_S \vec{u}_t = \operatorname{div}_x(\mathbb{G} J_t \nabla_x \vec{u}) + \operatorname{div}_x \mathbb{G}^0 + \rho_S \vec{g}. \quad (17)$$

Здесь

$$\vec{u} = \vec{v}_t,$$

$$\mathbb{G}_{ij}^0 = (\mathbb{G} : \nabla_x \vec{v}_*^0)_{ij} = \left( \sum_{k,l=1}^3 \mathbb{G}_{ijkl} \frac{\partial v_{*k}^0}{\partial x_l} \right)_{ij}.$$

Аналогично с помощью (16) уравнение (2) можно записать в эквивалентном виде

$$p = -\gamma^{-1} \operatorname{div}_x J_t \vec{u} + p^0, \quad \vec{x} \in \Omega_F, \quad t > 0. \quad (18)$$

Введем в рассмотрение характеристическую функцию области  $\Omega_F$ .

**Обозначение.**

$$\chi(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \vec{x} \in \Omega_F, \\ 0 & \text{при } \vec{x} \in \Omega \setminus \Omega_F. \end{cases} \quad (19)$$

С учетом этого обозначения совокупность уравнений и граничных условий (1)–(5) можно записать для всей области  $\Omega$  как одно уравнение с разрывными коэффициентами:

$$\rho^* \vec{u}_t = \operatorname{div}_x(\mathbb{M}^t \vec{u}_x) + \operatorname{div}_x \mathcal{N}^0 + \rho^* \vec{g}, \quad (20)$$

где обозначено

$$\mathbb{M}^t = \chi \mathbb{P} + (\chi \gamma^{-1} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + (1 - \chi) \mathbb{G}) \mathbb{J}_t, \quad (21)$$

$$\rho^* = \rho_F \chi + \rho_S (1 - \chi), \quad (22)$$

$$\mathcal{N}^0 = -\chi p^0 \mathbb{I} + (1 - \chi) \mathbb{G}^0. \quad (23)$$

Существование и единственность обобщенного решения задачи А доказывается стандартным образом для линейных задач посредством адаптации построения из [7, section 9.1]. Также выполняются следующие оценки [3, 7].

- Справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \left( \|\vec{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \right. \\ & \left. + \|\mathbb{D}_x(\mathbb{J}_t \vec{u}(t))\|_{L^2(\Omega_S)}^2 \right) + \\ & + \int_0^T \|\mathbb{D}_x(\vec{u}(t))\|_{L^2(\Omega_F)}^2 dt \leq C_0, \end{aligned} \quad (24)$$

где постоянная  $C_0$  зависит только от  $\|\vec{u}_*^0\|_{L^2(\Omega)}$ ,  $\|\mathcal{N}^0\|_{L^2(\Omega)}$ ,  $\|\vec{g}\|_{L^2(\Omega \times (0, T))}$ ,  $\|\vec{u}^*\|_{C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])}$ .

- Справедлива оценка

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|\mathbb{J}_t \vec{u}(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1, \quad (25)$$

где постоянная  $C_1$  так же, как и постоянная  $C_0$ , зависит только от  $\|\vec{u}_*^0\|_{L^2(\Omega)}$ ,  $\|\mathcal{N}^0\|_{L^2(\Omega)}$ ,  $\|\vec{g}\|_{L^2(\Omega \times (0, T))}$ ,  $\|\vec{u}^*\|_{C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])}$ .

- Пусть

$$\vec{u}_*^0 \in H^1(\Omega), \quad \mathcal{N}^0 \in L^2(\Omega),$$

$$\vec{g}, \vec{g}_t \in L^2(\Omega \times (0, T))$$

$$\text{и } \operatorname{div}_x(\chi \mathbb{P} \nabla_x \vec{u}_*^0 + \mathcal{N}^0) \in L^2(\Omega).$$

Тогда слабое обобщенное решение задачи А удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \left( \|\vec{u}_t(t)\|_{L^2(\Omega)} + \right. \\ & \left. + \|\nabla_x \vec{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \leq C_2, \end{aligned} \quad (26)$$

где постоянная  $C_2$  обладает теми же свойствами, что и  $C_0$  и  $C_1$ .

**3. Геометрия микроструктуры.** Определим геометрию областей  $\Omega$ ,  $\Omega_S$  и  $\Omega_F$ . Введем в рассмотрение две структуры трихом.

Расположение более высоких трихом предполагается  $\varepsilon$ -периодическим по переменным  $x_1$  и  $x_2$ , а расположение более низких трихом предполагается  $\varepsilon^2$ -периодическим по переменным  $x_1$  и  $x_2$ . Параметр  $\varepsilon$  является малым и положительным:  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

Для описания расположения трихом введем в рассмотрение шаблонные ячейки  $\Sigma = (0, 1) \times (0, 1)$  и  $\Theta = (0, 1) \times (0, 1)$ , каждая из которых состоит из двух подобластей и границы между этими подобластями:

$$\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_S \cup \Gamma_\Sigma, \quad \Theta = \Theta_F \cup \Theta_S \cup \Gamma_\Theta.$$

Здесь  $\Sigma_S$  — это проекция высокой трихомы на поверхность листа, взятая в масштабе  $\frac{1}{\varepsilon} : 1$ , то есть растянутая в  $\frac{1}{\varepsilon}$  раз. Аналогично,  $\Theta_S$  — это проекция низкой трихомы на поверхность листа, взятая в масштабе  $\frac{1}{\varepsilon^2} : 1$ .

Потребуем, чтобы  $\Sigma_S$  и  $\Theta_S$  были односвязными множествами с гладкими границами и чтобы границы множеств  $\Sigma_S$  и  $\Theta_S$  не имели общих точек с границами множеств  $\Sigma$  и  $\Theta$ , соответственно.

Далее, введем обозначения  $\hat{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\hat{y} = (y_1, y_2)$ ,  $\hat{z} = (z_1, z_2)$  и введем в рассмотрение характеристические функции  $\hat{\zeta} = \hat{\zeta}(\hat{y})$  и  $\hat{\psi} = \hat{\psi}(\hat{z})$  множеств  $\Sigma_F$  и  $\Theta_F$ , соответственно:

$$\hat{\zeta}(\hat{y}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{y} \in \Sigma_F, \\ 0 & \text{при } \hat{y} \in \bar{\Sigma} \setminus \Sigma_F, \quad \hat{y} \in [0, 1]^2, \end{cases} \quad (27)$$

$$\hat{\psi}(\hat{z}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{z} \in \Theta_F, \\ 0 & \text{при } \hat{z} \in \bar{\Theta} \setminus \Theta_F, \quad \hat{z} \in [0, 1]^2. \end{cases} \quad (28)$$

Продолжим функции  $\hat{\zeta}$  и  $\hat{\psi}$  на  $\mathbb{R}_{\hat{y}}^2$  и  $\mathbb{R}_{\hat{z}}^2$ , соответственно, 1-периодическим образом.

Теперь, используя произведенные выше построения, мы можем ввести геометрию областей  $\Omega_S = \Omega_S^\varepsilon$  и  $\Omega_F = \Omega_F^\varepsilon$  следующим образом.

Пусть  $\Lambda = \operatorname{const} > 0$  — толщина листа (без трихом),  $\delta^* = \operatorname{const} > 0$ ,  $\delta_* = \operatorname{const} > 0$  — длины высоких и низких трихом, соответственно. Считаем  $\delta^* + \Lambda < 1$ .

Определим характеристическую функцию  $\chi(\vec{x}) = \chi^\varepsilon(\vec{x})$  области  $\Omega_F = \Omega_F^\varepsilon$  следующим образом:

$$\chi^\varepsilon(\vec{x}) = \zeta\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, x_3\right) \psi\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon^2}, x_3\right), \quad (29a)$$

где

$$\zeta\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, x_3\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } \delta^* + \Lambda < x_3 < 1, \\ \hat{\zeta}\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) & \text{при } \Lambda \leq x_3 \leq \delta^* + \Lambda, \\ 0 & \text{при } 0 < x_3 < \Lambda, \end{cases} \quad (29b)$$

$$\psi\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon^2}, x_3\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } \delta^* + \Lambda < x_3 < 1, \\ \hat{\psi}\left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon^2}\right) & \text{при } \Lambda \leq x_3 \leq \delta^* + \Lambda, \\ 0 & \text{при } 0 < x_3 < \Lambda. \end{cases} \quad (29c)$$

Итак, введена структура областей  $\Omega_S^\varepsilon$  и  $\Omega_F^\varepsilon$  (рис. 1.).

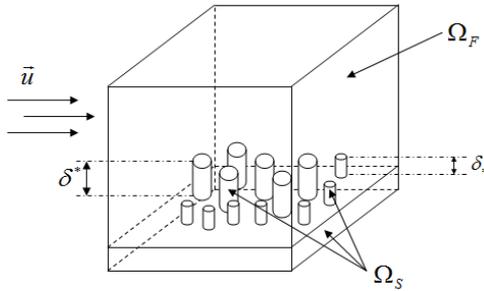


Рис. 1. Лист с трихомами и воздушный поток

**4. Предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Вывод трехмасштабных усредненных уравнений.** Нашей целью является предельный переход в уравнениях задачи А при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Этот переход будет основан на методе трехмасштабной сходимости Аллера – Бриана.

**Предложение 1.** Пусть  $\{w_\varepsilon\}$  – это ограниченная последовательность в  $L^2(\Omega \times (0, T))$ . Тогда найдутся подпоследовательность из  $\{w_\varepsilon\}$  (будем ее по-прежнему обозначать через  $\{w_\varepsilon\}$ ) и функция

$$\bar{w} = \bar{w}(\vec{x}, \hat{y}, \hat{z}, t), \quad \bar{w} \in L^2(\Omega \times \Sigma \times \Theta \times (0, T)),$$

такие, что справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega w_\varepsilon(\vec{x}, t) \varphi\left(\vec{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon^2}, t\right) d\vec{x} dt = \int_0^T \int_\Omega \int_\Sigma \int_\Theta \bar{w}(\vec{x}, \hat{y}, \hat{z}, t) \varphi(\vec{x}, \hat{y}, \hat{z}, t) d\vec{x} d\hat{y} d\hat{z} dt \quad (30)$$

для всевозможных гладких пробных функций  $\varphi = \varphi(\vec{x}, \hat{y}, \hat{z}, t)$ , 1-периодических по  $\hat{y} = (y_1, y_2)$  и  $\hat{z} = (z_1, z_2)$  [8, theorem 1.1].

**Определение.** Если выполняется предельное соотношение (30) для всевозможных  $\varphi$ , то говорим, что последовательность  $w_\varepsilon$  трехмасштабно сходится к  $\bar{w}$ :

$$w_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{w} \quad 3\text{-sc.}$$

Определив геометрию областей  $\Omega_F = \Omega_F^\varepsilon$  и  $\Omega_S = \Omega_S^\varepsilon$  в п. 3, мы ввели в постановку задачи А малый параметр  $\varepsilon > 0$ . Сделаем одно простое, но важное наблюдение.

**Замечание.** Постоянные  $C_0, C_1$  и  $C_2$  в оценках (24), (25) и (26) от  $\varepsilon$  не зависят.

Из этого замечания и предложения 1 непосредственно вытекают следующие свойства семейства  $\{\bar{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  слабых обобщенных решений задачи А.

**Предложение 2.** Пусть  $\{\bar{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$  – последовательность слабых обобщенных решений задачи А. Тогда найдутся подпоследовательность из  $\{\bar{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$  (по-прежнему обозначаемая через  $\{\bar{u}_\varepsilon\}$ ) и предельные вектор-функции  $\bar{u}(\vec{x}, t)$ ,  $\bar{u}^{(1)}(\vec{x}, \hat{y}, t)$ ,  $\bar{u}^{(2)}(\vec{x}, \hat{y}, \hat{z}, t)$ , такие, что

$$\bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{u}, \quad J_t \bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} J_t \bar{u} \quad 3\text{-sc.};$$

$$\bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{u} \quad \text{слабо в } L^2(\Omega \times (0, T));$$

$$J_t \bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} J_t \bar{u} \quad \text{сильно в } L^2(\Omega \times (0, T));$$

$$\nabla_x J_t \bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla_x J_t \bar{u} + \nabla_{\hat{y}} J_t \bar{u}^{(1)} + \nabla_{\hat{z}} J_t \bar{u}^{(2)} \quad 3\text{-sc.},$$

где  $\bar{u}^{(1)} \in L^2(\Omega \times (0, T); H^1_{\text{per}}(\Sigma)/\mathbb{R})$ ,

$$\bar{u}^{(2)} \in L^2(\Omega \times \Sigma \times (0, T); H^1_{\text{per}}(\Theta)/\mathbb{R}),$$

$$\nabla_x \bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla_x \bar{u} + \nabla_{\hat{y}} \bar{u}^{(1)} + \nabla_{\hat{z}} \bar{u}^{(2)} \quad 3\text{-sc.}$$

**5. Усредненная трехмасштабная трехскоростная модель (Задача Б).** В силу предложения 2 выводим предельную усредненную систему, состоящую из макроскопического уравнения

$$\rho \bar{u}_t - \text{div}_x \left( \mathbb{M}^t (\nabla_x \bar{u} + \nabla_{\hat{y}} \bar{u}^{(1)} + \nabla_{\hat{z}} \bar{u}^{(2)}) + \mathcal{N}^0 \right) = \rho \bar{g}, \quad (31a)$$

мезоскопического уравнения

$$\text{div}_{\hat{y}} \left( \mathbb{M}^t (\nabla_x \bar{u} + \nabla_{\hat{y}} \bar{u}^{(1)} + \nabla_{\hat{z}} \bar{u}^{(2)}) + \mathcal{N}^0 \right) = 0, \quad (31b)$$

микроскопического уравнения

$$\text{div}_{\hat{z}} \left( \mathbb{M}^t (\nabla_x \bar{u} + \nabla_{\hat{y}} \bar{u}^{(1)} + \nabla_{\hat{z}} \bar{u}^{(2)}) + \mathcal{N}^0 \right) = 0, \quad (31c)$$

начального условия

$$\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}^0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (31d)$$

к которой добавляется условие на внешней границе

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}^*(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T) \quad (31e)$$

и условия периодичности *мезоскопической скорости*  $\vec{u}^{(1)}$  и *микроскопической скорости*  $\vec{u}^{(2)}$ :

$$\vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(1)}(\vec{x}, \hat{y}, t) \quad 1\text{-периодична по } \hat{y}, \quad (31f)$$

$$\vec{u}^{(2)} = \vec{u}^{(2)}(\vec{x}, \hat{y}, \hat{z}, t) \quad 1\text{-периодична по } \hat{y} \text{ и } \hat{z}. \quad (31g)$$

Система (31) представляет собой замкнутую трехмасштабную трехскоростную модель аэродинамики в окрестности листа растения. Назовем ее *задачей Б*.

В условиях (31d) и (31e) функции  $\vec{u}^0$  и  $\vec{u}^*$  являются заданными. Согласно условиям (10), (11) и условиям, наложенным на микроструктуру, граничное распределение скоростей  $\vec{u}^*$  определяется по закону

$$\vec{u}^*(\vec{x}, t) = \begin{cases} \vec{u}^*(\vec{x}, t) & \text{при } \vec{x} \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_F, t > 0, \\ 0 & \text{при } \vec{x} \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_S, t > 0. \end{cases} \quad (32)$$

По теории трехмасштабной сходимости Аллера — Бриана в силу условий (6) и (9) начальное распределение скоростей в условии (31d) определяется формулой

$$\vec{u}^0(\vec{x}) = m(\vec{x})\vec{u}_*^0(\vec{x}) + (1 - m(\vec{x}))\vec{w}_*^0(\vec{x}), \quad (33)$$

в которой  $m(\vec{x}) = \int_{\Sigma} \int_{\Theta} \chi(\vec{x}, \hat{y}, \hat{z}) d\hat{z} d\hat{y}$ , а  $\chi$  — характеристическая функция множества  $\Omega_F \times \Sigma_F \times \Theta_F$ , то есть

$$\chi(\vec{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \zeta(\hat{y}, x_3)\psi(\hat{z}, x_3), \quad (34a)$$

$$\zeta(\hat{y}, x_3) = \begin{cases} 1 & \text{при } \delta^* + \Lambda < x_3 < 1, \\ \hat{\zeta}(\hat{y}) & \text{при } \Lambda \leq x_3 \leq \delta^* + \Lambda, \\ 0 & \text{при } 0 < x_3 < \Lambda, \end{cases} \quad (34b)$$

$$\psi(\hat{z}, x_3) = \begin{cases} 1 & \text{при } \delta_* + \Lambda < x_3 < 1, \\ \hat{\psi}(\hat{z}) & \text{при } \Lambda \leq x_3 \leq \delta_* + \Lambda, \\ 0 & \text{при } 0 < x_3 < \Lambda. \end{cases} \quad (34c)$$

Линейный оператор  $M^t$  в постановке задачи Б определяется формулой (21), в которой  $\chi = \chi(\vec{x}, \hat{y}, \hat{z})$ ,

$$\mathbb{P}\nabla_{\hat{y}}\vec{u}^{(1)} = (\lambda \operatorname{div}_{\hat{y}}\vec{u}^{(1)})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}_{\hat{y}}(\vec{u}^{(1)}), \quad (35)$$

$$\mathbb{P}\nabla_{\hat{z}}\vec{u}^{(2)} = (\lambda \operatorname{div}_{\hat{z}}\vec{u}^{(2)})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}_{\hat{z}}(\vec{u}^{(2)}), \quad (36)$$

где

$$\mathbb{D}_{\hat{y}ij}(\vec{\varphi}) = \frac{(1 - \delta_{i3})(1 - \delta_{j3})}{2} \left( \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i} \right),$$

$$\mathbb{D}_{\hat{z}ij}(\vec{\psi}) = \frac{(1 - \delta_{i3})(1 - \delta_{j3})}{2} \left( \frac{\partial\psi_i}{\partial z_j} + \frac{\partial\psi_j}{\partial z_i} \right),$$

$i, j = 1, 2, 3$ ,

$$\operatorname{div}_{\hat{y}}\vec{\varphi} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}, \quad \operatorname{div}_{\hat{z}}\vec{\psi} = \frac{\partial\psi_1}{\partial z_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial z_2}$$

для произвольных допустимых вектор-функций  $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(\hat{y})$  и  $\vec{\psi} = \vec{\psi}(\hat{z})$ ; через  $\rho$  обозначается усредненная трехмасштабная плотность

$$\rho(\vec{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \rho_F\chi(\vec{x}, \hat{y}, \hat{z}) + \rho_S(1 - \chi(\vec{x}, \hat{y}, \hat{z})). \quad (37)$$

Матричнозначная функция  $\mathcal{L}^0$  определяется формулой (23), в которой  $\chi = \chi(\vec{x}, \hat{y}, \hat{z})$ .

**Нерешенные задачи.** С точки зрения общей теории гомогенизации желательнее провести *асимптотическую декомпозицию* в модели Б, то есть разделить макро-, мезо- и микроскопический масштабы. Выполнение асимптотической декомпозиции приведет к построению эффективного (зависящего только от макроскопических переменных  $\vec{x}$  и  $t$ ) уравнения, решением которого будет служить макроскопическое распределение скоростей  $\vec{u}$  и коэффициенты которого будут однозначно определяться из задач на ячейках  $\Sigma$  и  $\Theta$ . Такое исследование безусловно выполнимо в силу линейности задачи.

Большой прикладной интерес имеет численный анализ задачи Б и предполагаемого эффективного уравнения. Ввиду относительной простоты модели Б, прежде всего, ее линейности, такой анализ можно провести с помощью стандартных вычислительных пакетов.

Авторы выражают благодарность заведующей лабораторией эволюционной биоинформатики и теоретической генетики ИЦиГ СО РАН Дмитрию Аркадьевичу Афонникову и участникам семинара лаборатории за многочисленные полезные обсуждения.

### Библиографический список

1. Goldstein S. Modern Developments in Fluid Dynamics. — New York, 1965.
2. Schreuder M.D.J., Brewer C.A., Heine C. Modelled Influences of Non-exchanging Trichomes on Leaf Boundary Layers and Gas Exchange // J. Theor. Biol. — 2001. — V. 210.
3. Hoffmann K.-H., Botkin N.D., Starovoi-tov V.N. Homogenization of interfaces between rapidly oscillating fine elastic structures and fluids // SIAM J. Appl. Math. — 2005. — V. 65, №3.
4. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. — 1992. — V. 23, №6.
5. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. — 1989. — V. 20.
6. Genaev M.A., Doroshkov A.V., Pshenichnikova T.A., Kolchanov N.I., Afonnikov D.A. Extraction of quantitative characteristics describing wheat leaf pubescence with a novel image-processing technique // Planta. — 2012. — V. 236.
7. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М., 1972.
8. Allaire G., Briane M. Multiscale convergence and reiterated homogenization // Proc. R. Soc. Edinb. — 1996. — V. 126.