

Численное исследование течения тонкого слоя жидкости с испарением**Е.В. Резанова*

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Numerical Study of Thin Liquid Layer Flow with Evaporation*E. V. Rezanova*

Altai State University (Barnaul, Russia)

Проводится численное исследование течения тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости, сопровождаемого спутным потоком газа. Жидкость движется по наклонной неравномерно нагретой твердой подложке и находится под действием силы тяжести. В качестве математической модели используются классические уравнения конвекции и обобщенные кинематическое, динамическое и энергетическое условия на термокапиллярной границе раздела. Вследствие параметрического анализа уравнений на термокапиллярной границе данные условия могут быть существенно упрощены. Эволюционное уравнение, полученное на основе кинематического условия, определяет изменение толщины жидкого слоя. Приведен численный алгоритм нахождения толщины слоя жидкости. Получены результаты численного моделирования стекания пленки для системы, где в качестве жидкости используется этанол, находящийся под действием потока азота. Представлено сравнение результатов численного моделирования, проведенного на основе уравнений конвекции Обербека-Буссинеска и уравнений Навье-Стокса и переноса тепла. Исследовано влияние угла наклона и характера нагрева твердой подложки на особенности течения жидкого слоя.

Ключевые слова: приближение тонкого слоя, уравнение тонкого слоя, испарение, обобщенные условия на границе раздела, численный алгоритм.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-30

Введение. Построению математических моделей, описывающих течения вязкой жидкости в приближении тонкого слоя, исследованию корректности моделей, а также их численному исследованию посвящено много работ (например, [1–5]). Часто при моделировании подобных течений требуется учитывать массоперенос

In the paper, the numerical study of a thin layer of a viscous incompressible fluid followed by a co-current gas flow is conducted. The liquid flows on an inclined non-uniformly heated solid surface under the action of gravity. The classical convection equations and the generalized kinematic, dynamic, and energy conditions on thermocapillary boundary are used as a mathematical model. Conditions can be significantly simplified due to parametric analysis of the equations for thermocapillary boundary. The evolution equation derived from the kinematic condition determines the liquid layer thickness change. A numerical algorithm for evaluation of the liquid layer thickness is proposed. Results of numerical simulation of the film motion are presented for the system with ethanol liquid under the action of a nitrogen stream. A comparison of results of numerical simulation based on equations of Oberbeck-Boussinesq and Navier-Stokes equations, and heat transfer is demonstrated. The influence of solid surface incidence angle and solid surface heating conditions on liquid layer flow particularities is investigated.

Key words: the thin layer approximation, the equation of a thin layer, evaporation, generalized conditions on the interface, the numerical algorithm.

на границе раздела. Результаты исследования испаряющихся пленок жидкостей представлены в работах [6–10].

В данной работе численно исследуется стекание слоя вязкой несжимаемой жидкости по наклоненной под углом α к линии горизонта непроницаемой подложке в двумерном случае. Сопутствующий поток газа движется над слоем жидкости. Учитывается испарение на термо-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 14-08-00163).

капиллярной границе раздела, положение которой определяется уравнением $z = h(x, t)$. Твердая граница задана уравнением $z = 0$. Система координат выбрана таким образом, что направление оси абсцисс совпадает с направлением течения жидкости (рис. 1). Вектор силы тяжести имеет вид $\mathbf{g} = (g_1, g_2) = (g \sin \alpha, -g \cos \alpha)$, $g = |\mathbf{g}|$.

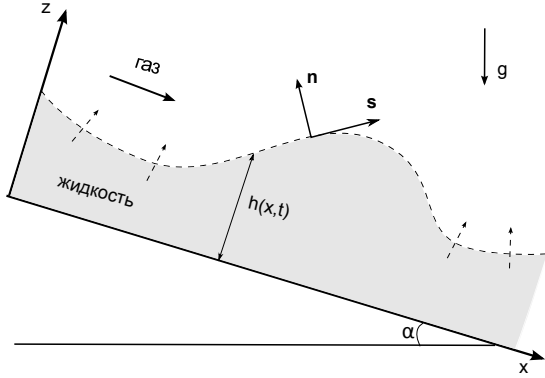


Рис. 1. Геометрия области течения

Продольная характерная длина исследуемой области много больше поперечной. Малый параметр задачи ε равен отношению поперечной длины d к продольной l . Характерная продольная и поперечная скорости u и w также связаны между собой с помощью малого параметра ε : $w_* = u_* \varepsilon$. Математическая модель для описания течений тонкого слоя жидкости в условиях испарения на границе раздела основана на длинноволновом приближении уравнений конвекции Обербека-Буссинеска (см. [9]). В качестве математической модели часто используются уравнения Навье-Стокса и переноса тепла, как, например, в работах [7, 8]. На границе $z = h(x, t)$ заданы обобщенные кинематическое, динамическое и энергетическое условия [11–13]. Также на термокапиллярной границе полагается выполненным кинетическое уравнение Герца – Кнудсена (см. [2, 7, 8]), определяющее зависимость локального потока массы испаряющейся жидкости от температуры на границе раздела.

На твердой подложке $z = 0$ заданы условия прилипания для скорости, распределение температуры имеет вид

$$T|_{z=0} = \Theta_0(x, t). \quad (1)$$

Задача сводится к определению толщины жидкого слоя $h(x, t)$ и изучается в предположении об умеренности чисел Рейнольдса ($Re = O(1)$).

1. Уравнение тонкого слоя. Для нахождения искомых функций задачи (компонент вектора скорости u, w , температуры T и модифицированного давления p') необходимо определить толщину слоя жидкости $h(x, t)$. Используя главные члены разложения неизвестных функций

по степеням малого параметра ε , можно найти функцию h , определяющую положение свободной границы, как следствие кинематического условия [9]:

$$\begin{aligned} & h_t + h_x[(1/24)\gamma_2 \cos \alpha A_x h^4 + \\ & + (1/6)(\gamma_2 \cos \alpha (\Theta_0)_x + \gamma_1 \sin \alpha A)h^3 + \\ & + (1/2)((C_0)_x + \gamma_1 \sin \alpha \Theta_0)h^2 + C_1 h] + \\ & + [(1/120)\gamma_2 \cos \alpha A_{xx} h^5 + \\ & + (1/24)(\gamma_2 \cos \alpha (\Theta_0)_{xx} + \gamma_1 \sin \alpha A_x)h^4 + \\ & + (1/6)((C_0)_{xx} + \gamma_1 \sin \alpha (\Theta_0)_x)h^3 + \\ & + (1/2)(C_1)_x h^2] + \\ & + E\varepsilon^{-1} \alpha_J (Ah + \Theta_0) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\gamma_1 = Gr/(Re\varepsilon)$, $\gamma_2 = Gr/Re$, $Gr = d^3 g \beta T_* / \nu^2$ – число Грасгофа, $Re = u_* l / \nu$ – число Рейнольдса, $E = \kappa T_* / (\lambda_U \rho \nu)$ – коэффициент испарения жидкости, $\alpha_J = \alpha_A \rho_s \lambda_U T_* J_*^{-1} (M / (2\pi R_g T_s^3))^{1/2}$ [2, 13], где α_A – коэффициент accommodation, ρ_s – плотность пара, λ_U – скрытая теплота парообразования, M – молекулярный вес, R_g – универсальная газовая постоянная, T_s – температура насыщенного пара, J_* – характерное значение потока массы в результате испарения, ν, β – коэффициенты кинематической вязкости и теплового расширения жидкости, κ – коэффициент теплопроводности жидкости, T_* – характерная температура. Функция Θ_0 определена согласно (1), функции A, C_0, C_1 зависят от толщины слоя жидкости и распределения температуры на твердой подложке. При этом для функции A имеет место следующее выражение:

$$A = \frac{(\bar{\beta}_3 \alpha_J + \bar{\beta}_6 h_{xx} \alpha_J) \Theta_0}{1 - \bar{\beta}_3 \alpha_J - \bar{\beta}_6 h_{xx} \alpha_J h}. \quad (3)$$

Здесь $\bar{\beta}_3 = \varepsilon$, $\bar{\beta}_6 = \varepsilon(1 - (1/\bar{\rho})) / (Re C_a \bar{U})$, $C_a = u_* \rho \nu / \sigma_0$ – капиллярное число, $\bar{U} = \lambda_U / u_*^2$, σ_0 – значение коэффициента σ при некотором значении температуры, $\bar{\rho}$ – отношение коэффициентов плотностей газа и жидкости.

Функции C_0, C_1 выражаются через функции h и A следующим образом [9]:

$$\begin{aligned} C_0(x, t) &= p^g - \alpha_{C_a} h_{xx} (1 - \alpha_\sigma (Ah + \Theta_0)) - \\ & - \gamma_2 \cos \alpha (1/2) Ah^2 - \gamma_2 \cos \alpha \Theta_0 h - \\ & - \gamma_1 (\beta T_*)^{-1} x \sin \alpha + \gamma_2 h \cos \alpha, \\ C_1(x, t) &= -\alpha_{M_a} (Ah + \Theta_0)_x - \\ & - h \left(-\alpha_{C_a} h_{xxx} (1 - \alpha_\sigma (Ah + \Theta_0)) + \right. \\ & \left. + \alpha_{C_a} \alpha_\sigma h_{xx} (Ah + \Theta_0)_x - (1/2) \gamma_2 \cos \alpha (Ah^2)_x - \right. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma_2 \cos \alpha (\Theta_0 h)_x - \gamma_1 (\beta T_*)^{-1} \sin \alpha + \gamma_2 \cos \alpha h_x) - \\
 & -\gamma_1 \sin \alpha \left((1/2) A h^2 + \Theta_0 h \right) - \\
 & -\gamma_2 \cos \alpha \left((1/6) A_x h^3 + (1/2) (\Theta_0)_x h^2 \right). \quad (5)
 \end{aligned}$$

Здесь p^g — давление в газе (безразмерное), $\alpha_{Ca} = \varepsilon^3 / Ca$, $\alpha_\sigma = Ma Ca / (Re Pr)$, $\alpha_{Ma} = Ma \varepsilon / Pr$, где $Ma = \sigma_T T_* l / (\rho \nu \chi)$ — число Марангони, $Pr = \nu / \chi$ — число Прандтля, σ_T — температурный коэффициент поверхностного натяжения, χ — коэффициент температуропроводности.

2. Схема численного решения задачи.

Рассматривается периодическая задача о нахождении функции h , удовлетворяющей уравнению (2) на промежутке $[-L; L]$. Полагаются выполненными следующие периодические условия:

$$\begin{aligned}
 h|_{x=-L} &= h|_{x=L}, \\
 h_x|_{x=-L} &= h_x|_{x=L}, \\
 h_{xx}|_{x=-L} &= h_{xx}|_{x=L}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Пусть начальное положение термокапиллярной границы определяется функцией $h_0(x) = 1 - \delta_1 \cos kx$. Функция Θ_0 , определяющая неравномерный нагрев подложки, также полагается заданной.

В результате подстановки выражений (4) и (5) уравнение (2) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
 h_t + A_4 h_{xxxx} + A_3 h_{xxx} + \\
 + A_2 h_{xx} + A_1 h + D = 0. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты A_4, A_3, A_2, A_1, D представляют собой функции, зависящие от A, h, Θ_0 и их производных.

Для численного решения уравнения (7) применяется неявная конечно-разностная схема следующего вида:

$$\begin{aligned}
 \frac{h^{k+1} - h^k}{\tau} + A_4^k h_{xxxx}^{k+1} + A_3^k h_{xxx}^{k+1} + \\
 + A_2^k h_{xx}^{k+1} + A_1^k h^{k+1} + D^k = 0. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Для реализации данной неявной схемы вводится равномерная разностная сетка x_1, x_2, \dots, x_{N+1} , $x_n = -L + (n-1)\Delta x$, $n = 1, 2, \dots, N+1$ с шагом $\Delta x = 2L/N$. Используются конечно-разностные аналоги второго порядка аппроксимации для всех производных по x , входящих в (8).

Конечно-разностную схему (8) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 b_2^k h_1^{k+1} + c_2^k h_2^{k+1} + e_2^k h_3^{k+1} + f_2^k h_4^{k+1} = d_2^k, \\
 a_n^k h_{n-2}^{k+1} + b_n^k h_{n-1}^{k+1} + c_n^k h_n^{k+1} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + e_n^k h_{n+1}^{k+1} + f_n^k h_{n+2}^{k+1} = d_n^k, \\
 a_N^k h_{N-2}^{k+1} + b_N^k h_{N-1}^{k+1} + \\
 + c_N^k h_N^{k+1} + e_N^k h_{N+1}^{k+1} = d_N^k. \quad (9)
 \end{aligned}$$

$n = 3, 4, \dots, N-1$. Коэффициенты $a_n^k, b_n^k, c_n^k, d_n^k, e_n^k, f_n^k$ вычисляются согласно соотношениям:

$$a_n^k = \frac{\tau(A_4)_n^k}{\Delta x^4} - \frac{\tau(A_3)_n^k}{2\Delta x^3},$$

$$b_n^k = \frac{-4\tau(A_4)_n^k}{\Delta x^4} + \frac{\tau(A_3)_n^k}{\Delta x^3} + \frac{\tau(A_2)_n^k}{\Delta x^2},$$

$$c_n^k = 1 + \frac{6\tau(A_4)_n^k}{\Delta x^4} - \frac{\tau(A_2)_n^k}{\Delta x^2} + (A_1)_n^k \tau,$$

$$e_n^k = \frac{-4\tau(A_4)_n^k}{\Delta x^4} - \frac{\tau(A_3)_n^k}{\Delta x^3} + \frac{\tau(A_2)_n^k}{\Delta x^2},$$

$$f_n^k = \frac{\tau(A_4)_n^k}{\Delta x^4} + \frac{\tau(A_3)_n^k}{2\Delta x^3}, \quad d_n^k = h^k - \tau D_n^k,$$

где $n = 3, \dots, N-1$. Для коэффициентов первого и последнего уравнений системы (9) выполняются равенства

$$b_2^k = \frac{A_4^k \tau}{\Delta x^4} - \frac{A_2^k \tau}{\Delta x^2},$$

$$c_2^k = 1 - \frac{3A_4^k \tau}{\Delta x^4} - \frac{A_3^k \tau}{2\Delta x^3} + \frac{2A_2^k \tau}{\Delta x^2} - \tau A_1^k,$$

$$e_2^k = \frac{3A_4^k \tau}{\Delta x^4} + \frac{A_3^k \tau}{\Delta x^3} - \frac{A_2^k \tau}{\Delta x^2},$$

$$f_2^k = -\frac{A_4^k \tau}{\Delta x^4} + \frac{A_3^k \tau}{\Delta x^3}, \quad d_2^k = D^k \tau + h_2^k,$$

$$a_N^k = -\frac{A_4^k \tau}{\Delta x^4} + \frac{A_3^k \tau}{\Delta x^3},$$

$$b_N^k = \frac{3A_4^k \tau}{\Delta x^4} - \frac{A_3^k \tau}{\Delta x^3} - \frac{A_2^k \tau}{\Delta x^2},$$

$$c_N^k = 1 - \frac{3A_4^k \tau}{\Delta x^4} + \frac{A_3^k \tau}{2\Delta x^3} + \frac{2A_2^k \tau}{\Delta x^2} - \tau A_1^k,$$

$$e_N^k = \frac{A_4^k \tau}{\Delta x^4} - \frac{A_2^k \tau}{\Delta x^2}, \quad d_N^k = D^k \tau + h_N^k.$$

Для реализации периодических условий (6) используются конечно-разностные аналоги второго порядка аппроксимации.

Задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (9) методом пятиточечной прогонки и прогонки с параметром. Поиск h_n осуществляется в виде $h_n = \alpha_n h_{n+1} + \beta_n h_{n+2} + \gamma_n + \delta_n h_N$. Формулы для прогоночных коэффициентов задаются соотношениями:

$$\alpha_n = \frac{-b_n \beta_{n-1} + e_n + \beta_{n-1} a_n \alpha_{n-2}}{a_n \beta_{n-2} + b_n \alpha_{n-1} + c_n + a_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2}},$$

$$\beta_n = \frac{-f_n}{a_n \beta_{n-2} + b_n \alpha_{n-1} + c_n + a_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2}},$$

$$\gamma_n = \frac{d_n - a_n \gamma_{n-2} - b_n \gamma_{n-1} - a_n \gamma_{n-1} \alpha_{n-2}}{a_n \beta_{n-2} + b_n \alpha_{n-1} + c_n + a_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2}},$$

$$\delta_n = \frac{-a_n \delta_{n-2} + b_n \delta_{n-1} + a_n \delta_{n-1} \alpha_{n-2}}{a_n \beta_{n-2} + b_n \alpha_{n-1} + c_n + a_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2}}.$$

Здесь также $n = 3, 4, \dots, N - 1$. Стартовые значения коэффициентов $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ продиктованы первым уравнением системы (9) и граничным условием. Затем в качестве обратного хода прогонки используется соотношение $h_n = \tilde{\alpha}_n h_{N+1} + \tilde{\beta}_n$. В роли параметра выступает неизвестное значение h при $x = -L$ и $x = L$ на каждом временном слое с привлечением другого граничного условия.

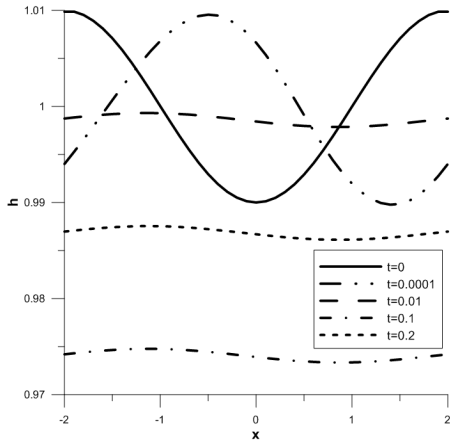


Рис. 2. Испарение слоя жидкости с течением времени в условиях неоднородного нагрева ($k_2 = 0$)

3. Результаты численного исследования. Численно исследовано периодическое стекание жидкости (этанол). Начальное положение термокапиллярной границы задается в виде $h_0 = 1 - \delta_1 \cos kx$. Неравномерный нагрев подложки (см. 1) определяется с помощью функции

$$\Theta_0 = 1 + \delta_0 \cos k_1 x \cdot \cos k_2 t. \quad (10)$$

Здесь $\delta_0 = 0.01, \delta_1 = 0.25, k = k_1 = \pi/2, L = 2$. Безразмерные параметры $\tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_6$ (см. (3)) принимались равными 0.1 и 0, соответственно.

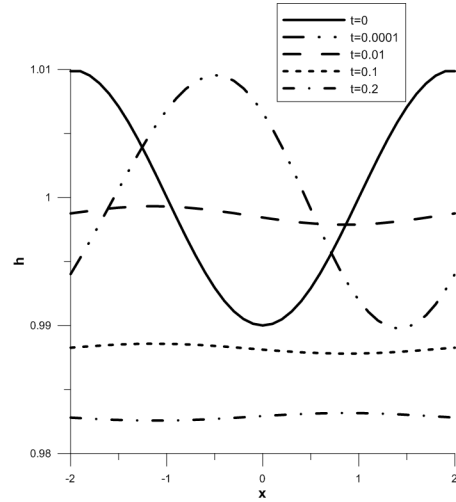


Рис. 3. Испарение слоя жидкости с течением времени в условиях нестационарного нагрева ($k_2 = 2$)

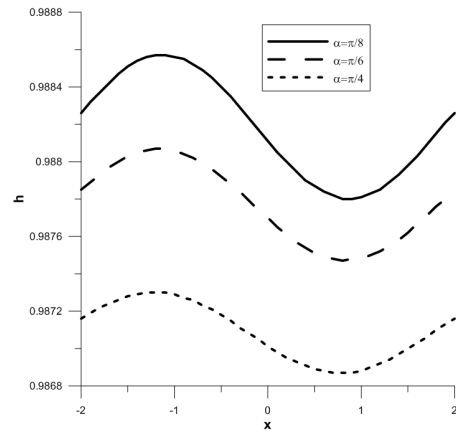


Рис. 4. Испарение слоя жидкости при различных углах наклона подложки в условиях нестационарного нагрева ($k_2 = 2$)

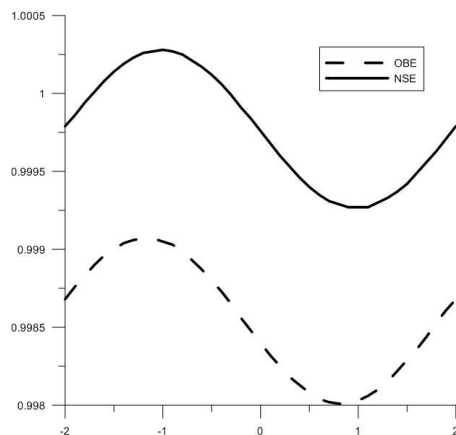


Рис. 5. Сравнение результатов, полученных с помощью математических моделей, основанных на уравнениях Обербека-Буссинеска и Навье-Стокса в условиях нестационарного нагрева

Рисунки 2 и 3 демонстрируют процесс испарения жидкого слоя со временем в условиях нормальной гравитации ($g = 9.8 \text{ м/с}^2$). На рисунке 2 представлены значения толщины слоя в различные моменты времени в случае, когда твердая подложка подвержена неоднородному нагреву ($k_2 = 0$, см. (10)). Рисунок 3 иллюстрирует зависимость толщины жидкого слоя от времени в случае нестационарного нагрева (здесь $k_2 = 2$). Следует отметить, что при определении функции Θ_0 в виде (10) нестационарность нагрева подложки замедляет процесс испарения.

Рисунок 4 демонстрирует течение жидкости по наклоненной под разными углами нестационарно нагреваемой подложке в момент времени $t = 0.1$ (безразмерное время), $k_2 = 2$, угол α принимает значения, равные $\pi/8, \pi/6, \pi/4$. С увеличением угла наклона подложки наблюдается уменьшение толщины жидкого слоя.

На рисунке 5 представлено сравнение результатов моделирования испарения тонкого слоя жидкости в условиях нормальной гравитации

($g = 9.8 \text{ м/с}^2$), проводимого с помощью математических моделей, основанных на уравнениях Навье-Стокса (NSE) и Обербека-Буссинеска (ОБЕ). Наблюдаются качественно близкие результаты, но присутствуют некоторые количественные различия. Так, при использовании в качестве основы математической модели системы уравнений конвекции Обербека-Буссинеска, можно наблюдать более интенсивное испарение слоя жидкости.

Заключение. В работе представлен численный алгоритм определения положения термокапиллярной границы тонкого слоя жидкости, стекающего по наклонной, неравномерно нагретой подложке. Приведены результаты численного исследования испарения пленки жидкости (этанол) в случае нестационарного и неоднородного нагрева подложки, а также при различных значениях угла ее наклона. Проведено сравнение результатов расчетов в случае использования математических моделей конвекции Обербека-Буссинеска и Навье-Стокса.

Библиографический список

1. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-Scale Evolution of Thin Liquid Films // *Reviews of Modern Physics*. — 1997. — V. 69 (3).
2. Miladinova S., Slavtchev S., Lebon G., Legros J.-C. Long-Wave Instabilities of Non-Uniformly Heated Falling Films // *Fluid Mech.* — 2002. — V. 453.
3. Кабов О.А., Кабова Ю.О., Кузнецов В.В. Испарение неизотермической пленки жидкости в микроканале при спутном потоке газа // *ДАН.* — 2012. — 446 (5).
4. Кабова Ю.О., Кузнецов В.В. Стеkanie неизотермического тонкого слоя жидкости с постоянной вязкостью // *ПМТФ.* — 2002. — Т. 43, № 6.
5. Копбосынов Б.К., Пухначев В.В. Термокапиллярное движение в тонком слое жидкости // *Гидромеханика и процессы переноса в невесомости* : сб. научн. трудов. — АН СССР, Ур. научн. центр. — 1983.
6. Shklyaev O., Fried E. Stability of an evaporating thin liquid film // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2007. — Vol. 584.
7. Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Тарасов Я.А. Математическое моделирование термокапиллярных течений в тонком слое жидкости с учетом испарения // *Известия Алтайского гос. ун-та.* — 2014. — № 1/1(81).
8. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Математическая модель течений тонкого слоя жидкости с учетом испарения на термокапиллярной границе раздела // *Известия Алтайского гос. ун-та.* — 2014. — № 1/2(81).
9. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Построение математической модели течений в тонком слое жидкости на основе классических уравнений конвекции и обобщенных условий на границе раздела // *Известия Алтайского гос. ун-та.* — 2015. — № 1/1(85).
10. Тарасов Я.А. Математическая модель конвективных течений жидкости с учетом испарения в приближении тонкого слоя. — Барнаул, 2014.
11. Iorio C.S., Goncharova O.N., Kabov O.A. Study of evaporative convection in an open cavity under shear stress flow // *Microgravity Sci. Technol.* — 2009. — V. 21 (1).
12. Iorio C.S., Goncharova O.N., Kabov O.A. Heat and mass transfer control by evaporative thermal patterning of thin liquid layers // *Computational Thermal Sci.* — 2011. — №3(4).
13. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // *Известия Алтайского гос. ун-та.* — 2012. — № 1/2 (73).