УДК 519.8:531

Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде*

А.А. Папин, А.Н. Сибин

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

A Self-Similar Solution of Piston-Like Displacement of Fluids in a Poroelastic Medium

A.A. Papin, A.N. Sibin

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается одномерная математическая модель совместного движения двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде. Данная модель является обобщением классической модели Маскета-Леверетта, в которой пористость считается заданной функцией пространственной координаты. Учет сжимаемости пористой среды является принципиальным моментом. В основе предлагаемой модели лежат уравнения сохранения массы жидкостей и пористого скелета, закон Дарси для жидкостей, учитывающий движение пористого скелета, формула Лапласа для капиллярного давления, реологическое уравнение для пористости и условие равновесия «системы в целом». В пункте 1 дается постановка одномерной задачи и проводится преобразование системы уравнений, записанной в переменных Эйлера. Переход в переменные Лагранжа приводит к замкнутой системе уравнений, которая не содержит скорости твердой фазы. В пункте 2 рассмотрена задача поршневого вытеснения жидкостей в пороупругом грунте. Рассмотрен автомодельный аналог задачи Н.Н. Веригина. В случае специального вида коэффициента фильтрации, зависящего от пористости, для упругой среды получено автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в квадратурах.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, закон Дарси, насыщенность, пороупругость, переменные Лагранжа.

In this paper, the one-dimensional mathematical model of joint motion of two immiscible fluids in a poroelastic medium is considered. This model is a generalization of the Muskat-Leverett classical model in which porosity is considered to be a given function of spatial coordinates. The consideration of porous medium compressibility is the basic moment. The proposed model is based on the mass conservation equation for liquids and a porous skeleton, Darcy's law for liquids with consideration of a porous skeleton motion, the Laplace formula for capillary pressure, rheological equation for porosity and equilibrium condition "of the system as a whole". Paragraph 1 provides the formulation of the one-dimensional model and the conversion of system of equations written in Euler variables. The transition to Lagrange variables leads to a closed system of equations that does not contain solid phase velocity. Paragraph 2 deals with the problem of piston-like displacement of fluids in poroelastic soil. A self-similar analogue of the Verigin's problem is considered. In case of a porosity dependant special type filtration coefficient, the self-similar solution of the problem of piston-like displacement of fluids in quadrature for an elastic medium is obtained.

Key words: two-phase filtration, Darcy's law, saturation, poroelastic, Lagrange variables.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-27

1. Одномерное движение. Рассматривается движение двухфазной несжимаемой жидкости в неоднородном анизотропном грунте с пористостью ϕ (доля объема среды, приходящаяся на пустоты). Уравнения сохранения массы и импульса в одномерном случае с учетом изменения пористости принимают вид [1–3]

$$\frac{\partial \phi s_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi s_i u_i) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

$$s_i \phi (u_i - u_3) = -K_0 \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}(\frac{\partial p_i}{\partial x} - \rho_i^0 g), \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291 и государственного задания Министерства №2014/2.

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)u_3)=0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=-\rho_{tot}g, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t}+u_3\frac{\partial p_e}{\partial x}), \qquad (5)$$

$$p_2-p_1=p_c(x,s), \qquad (6)$$

$$p_e=p_{tot}-p_f, \qquad (7)$$

$$p_{tot}=\phi p_f+(1-\phi)p_s, \quad p_f=s_1p_1+s_2p_2.$$

Здесь (x,t) — переменные Эйлера, $\vec{u}_i$, s_i — скорость и насыщенность фаз (доля пор, занятых i-й фазой), $\vec{u}_3$ — скорость твердого скелета, K_0 — коэффициент фильтрации (функция пористости), ρ_i^0 — истинные плотности фаз (принимаются постоянными), p_e — эффективное давление, p_{tot} — общее давление, p_f, p_s — соответственно давления жидкой и твердой фаз, $\rho_{tot}=(1-\phi)\rho_3^0+\phi(s_1\rho_1^0+s_2\rho_2^0)$ — общая плотность; $a_1(\phi)$ и $a_2(\phi)$ — коэффициенты объемной вязкости и объемной сжимаемости горной породы есть заданные функции (модельные зависимости: $a_1(\phi)=\phi^m/\nu, a_2(\phi)=\phi^b\beta_\phi$, где $b=1/2$, $m\in[0,2]$, $n=3$, μ, ν, β_ϕ — положительные параметры пороупругой среды [4, 5]); $\overline{k_{0i}}$ — относительные фазовые проницаемости, μ_i — коэффициенты динамической вязкости, p_i — давления фаз, $\vec{g}$ — вектор ускорения силы тяжести. При этом $\overline{k_{0i}}$ должны зависеть от насыщенности s_i, поскольку часть порового пространства занята другой жидкостью. По определению, насыщенности s_i меняются в пределах $0<s_i^0\le s_i\le 1-s_j^0<1$, $i\neq j$, $s_1+s_2=1$, и при достижении значений $s_i=s_i^0$ движение i-й компоненты прекращается, что обеспечивается выполнением условий $\overline{k_{0i}}(s_i^0)=0$, $i=1,2$.

При заданной пористости уравнения (1), (2), (6) образуют классическую модель Маскета-Леверетта [6, 7], математическая теория для которой построена в [8]. Имеется ряд задач, в которых необходимо учитывать деформацию пористой среды (геодинамика нефтегазовых коллекторов [9], внутренняя суффозия [10] и т.д.). В работах [11–14] дано обоснование некоторых однофазных моделей течений в пороупругих средах. Исследованию задач суффозии посвящены работы [15–18] (обзор дан в [19]).

Пусть $y=y(\zeta,x,t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta}=u_3(y,\zeta), \quad y|_{\zeta=t}=x. \qquad (8)$$

Положим $\xi=y(\zeta,x,t)|_{\zeta=0}$ и возьмем за новые переменные ξ и t. Тогда $1-\phi(\xi,t)=(1-\phi^0(\xi))J(\xi,t)$, где $J(\xi,t)=\frac{\partial\xi}{\partial x}$ — якобиан перехода. Система уравнений (1)–(4) в новых переменных имеет вид

$$\frac{\partial\phi s_i}{\partial t}+J\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi s_iu_i)-u_3J\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi s_i)=0, \quad i=1,2,$$

$$s_i\phi(u_i-u_3)=$$

$$=-K_0\frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}(\frac{(1-\phi)}{(1-\phi^0)}\frac{\partial p_i}{\partial\xi}-\rho_i^0g), \quad i=1,2,$$

$$s_1+s_2=1, \quad p_2-p_1=p_c(x,s)=\overline{p_c}(x)j(s),$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+\frac{(1-\phi)^2}{(1-\phi^0)}\frac{\partial u_3}{\partial\xi}=0,$$

$$\frac{(1-\phi)}{(1-\phi^0)}\frac{\partial u_3}{\partial\xi}=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t},$$

$$p_e=p_{tot}-p_f, \quad p_f=s_1p_1+s_2p_2,$$

$$\frac{(1-\phi)}{(1-\phi^0)}\frac{\partial p_{tot}}{\partial\xi}=-\rho_{tot}g,$$

$$\rho_{tot}=(1-\phi)\rho_3^0+\phi(s_1\rho_1^0+s_2\rho_2^0).$$

Поскольку

$$u_3\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi s_i)=\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi s_iu_3)-\phi s_i\frac{\partial u_3}{\partial\xi},$$

то первые уравнения полученной системы можно привести к виду

$$\frac{1}{(1-\phi)}\frac{\partial}{\partial t}(\phi s_i)+\frac{1}{(1-\phi^0)}\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi s_i(u_3-u_i))+$$

$$+\frac{1}{(1-\phi^0)}\phi s_i\frac{\partial u_3}{\partial\xi}=0, \quad i=1,2.$$

Используя уравнение неразрывности для третьей фазы, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}s_i)+\frac{1}{(1-\phi^0)}\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi s_i(u_i-u_3))=0.$$

Наконец, переходя от (ξ,t) к массовым лагранжевым переменным $(\bar{x},t)$ по правилу

$$(1-\phi^0(\xi))d\xi=d\bar{x}, \quad \bar{x}(\xi)=\int_0^\xi(1-\phi^0(\eta))d\eta$$

и сохраняя затем для переменной $\bar{x}$ обозначение x, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}s_i)+\frac{\partial}{\partial x}(\phi s_i(u_i-u_3))=0, \quad i=1,2, \qquad (9)$$

$$s_i\phi(u_i-u_3)=-K_0\frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}((1-\phi)\frac{\partial p_i}{\partial x}-\rho_i^0g), \qquad (10)$$

$$s_1+s_2=1, \quad p_2-p_1=p_c(x,s)=\overline{p_c}(x)j(s), \qquad (11)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+(1-\phi)^2\frac{\partial u_3}{\partial x}=0, \qquad (12)$$

$$(1-\phi)\frac{\partial u_3}{\partial x}=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \qquad (13)$$

$$(1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=-\rho_{tot}g. \qquad (14)$$

2. Поршневое вытеснение. Пусть имеется прямолинейная цепочка близко расположенных относительно друг друга скважин, нагнетающих в бесконечный пласт с заданными постоянными давлениями p_1^0 жидкость (например воду) с вязкостью μ_1. Горизонтальный пласт ($g=0$) содержит другую жидкость, например нефть с вязкостью μ_2, находящуюся под постоянным давлением p_2^0. Выберем ось x направленной перпендикулярно по отношению к линии скважин и ввиду симметрии процесса рассмотрим полубесконечный интервал $x\in(0,\infty)$. Процесс вытеснения нефти водой описывается поршневой моделью [20]. Пусть жидкости несжимаемы (ρ_1^0 и ρ_2^0 постоянные), капиллярный скачек равен нулю и преобладают упругие свойства среды ($a_1(\phi)=$ $=0$). Ключевым моментом является переменная пористость грунта. В области $x\in[0,l)=\Omega_1$ концентрация воды $s_1=1$, а концентрация нефти $s_2=0$. В области $x\in(l,\infty)=\Omega_2$ концентрация воды $s_1=0$, а концентрация нефти $s_2=1$. Граница раздела воды и нефти $x=l(t)$ определяется в ходе решения задачи. С учетом сделанных предположений система (9)–(14) в областях Ω_i принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi_i}{1-\phi_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x}(\phi_i(u_i-u_{3i}))=0,\ \ i=1,2, \qquad (15)$$

$$\phi_i(u_i-u_{3i})=-K_0k_{0i}(1-\phi_i)\frac{\partial p_i}{\partial x}, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial(1-\phi_i)}{\partial t}+(1-\phi_i)^2\frac{\partial u_{3i}}{\partial x}=0, \qquad (17)$$

$$(1-\phi_i)\frac{\partial u_{3i}}{\partial x}=-a_2(\phi_i)\frac{\partial p_{ei}}{\partial t}, \qquad (18)$$

$$p_{tot}=p_{tot}^0(t), \quad p_1=p_2,$$

где $k_{0i}=\overline{k}_{0i}/\mu_i$.

Из соотношения (7) следует

$$p_{ei}=p_{tot}^0(t)-p_i. \qquad (19)$$

Здесь нижний индекс i обозначает, что рассматриваемые функции определены в областях Ω_i, $i=1,2$. Заметим, что

$$\frac{1}{(1-\phi)^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right).$$

С учетом последнего равенства уравнения (17) примают вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi_i}{1-\phi_i}\right)=\frac{\partial u_{3i}}{\partial x}.$$

Используя (17) и (18), получим

$$\frac{1}{1-\phi_i}\frac{\partial\phi_i}{\partial t}=-a_2(\phi_i)\frac{\partial p_{ei}}{\partial t},$$

В дальнейшем предполагается, что $a_2(\phi)=\beta_\phi\phi$ и без ограничения общности считаем $\beta_\phi=1$. Тогда из последнего равенства получим

$$ln\left|\frac{\phi_i}{1-\phi_i}\right|+p_{ei}=lnC_i, \qquad (20)$$

где

$$C_i=\frac{\phi_i^0e^{p_{tot}^0(0)-p_i^0}}{1-\phi_i^0}, \quad \phi_i|_{t=0}=\phi_i^0, \quad p_i|_{t=0}=p_i^0.$$

Следует отметить, что равенства (20) приводятся к виду

$$\phi_i=\frac{1}{1+C_ie^{p_{tot}^0(t)-p_i}}.$$

Откуда следует выполнение физического принципа максимума для пористости: $0\le\phi_i\le1$.

Сложив уравнения (17) и (15), получим

$$(1-\phi_i)u_{3i}+\phi_iu_i=D_i(t). \qquad (21)$$

Используя (21) и (16), получим соотношение

$$u_{3i}=D_i+(1-\phi_i)K_0k_{0i}\frac{\partial p_i}{\partial x}. \qquad (22)$$

Из (21), используя (22), выразим скорость i-той фазы

$$u_i=D_i-\frac{(1-\phi_i)^2}{\phi_i}K_0k_{0i}\frac{\partial p_i}{\partial x}.$$

Подставив (22) в (17) и используя (19), (20), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi_i}{1-\phi_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\phi_i}K_0(\phi_i)k_{0i}\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\right).$$

Пусть коэффициент фильтрации имеет специальный вид: $K_0(\phi)=\widetilde{K}\frac{\phi}{(1-\phi)^2}$, где $\widetilde{K}=const$ — размерный коэффициент. Тогда предыдущее равенство принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi_i}{1-\phi_i}\right)=\kappa_i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi_i}{1-\phi_i}\right)\right). \qquad (23)$$

Здесь $\kappa_i=\widetilde{K}k_{0i}=const$. Положим $\varphi_i=\frac{\phi_i}{1-\phi_i}$ и представим уравнение (23) в виде

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=\kappa_i\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}. \qquad (24)$$

Предполагается, что в начальный момент времени $l(0) = 0$, $\varphi_i(x, 0) = \varphi_i^0 = const$, $(i = 1, 2)$. На внешних границах областей заданы условия:

$$\varphi_1(0, t) = \varphi_1^0 = const, \quad \varphi_2(\infty, t) = \varphi_2^0, \qquad (25)$$

которые согласующиеся с начальными данными. На подвижной свободной границе $x = l(t)$ должны быть обеспечены условия непрерывности пористости и расходов (скоростей фильтрации Дарси)

$$\varphi_1(l, t) = \varphi_2(l, t), \qquad (26)$$

$$\kappa_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(l, t) = \kappa_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(l, t), \qquad (27)$$

а также кинематическое условие

$$\frac{dl}{dt} = -\kappa_1 \frac{1 + \varphi_1}{\varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(l, t). \qquad (28)$$

Введем в каждой из областей Ω_1, Ω_2 автомодельные переменные:

$$y_1 = \frac{x}{2\sqrt{\kappa_1 t}}, \quad y_2 = \frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 t}}.$$

Будем искать функции $\varphi_1(x, t)$, $\varphi_2(x, t)$, $x = l(t)$ в виде $\varphi_1(y_1)$, $\varphi_1(y_2)$ и $l = c\sqrt{t}$, где c — пока произвольная константа. Легко видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{y_i}{2t} \frac{d}{dy_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa_i t}} \frac{d}{dy_i}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{4\kappa_i t} \frac{d^2}{dy_i^2}$$

и уравнения (24) примут вид

$$\frac{d^2 \varphi_i}{dy_i^2} + 2y_i \frac{d\varphi_i}{dy_i} = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим

$$\varphi_i = A_i \mathtt{erf} y_i + B_i,$$

где функция

$$\mathtt{erf} y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^y e^{-\zeta^2} d\zeta$$

есть интеграл вероятности, причем $\mathtt{erf}(0) = 0$, $\mathtt{erf}(\infty) = 1$. Заметим, что подвижная граница $l = c\sqrt{t}$ в автомодельных переменных y_i переходит в фиксированные границы $y_{1*} = c/(2\sqrt{\kappa_1})$ и $y_{2*} = c/(2\sqrt{\kappa_2})$, а фиксированные граничные точки $x = 0$, $x = \infty$ переходят, соответственно, в точки $y_1 = 0$, $y_2 = \infty$. Для определения пяти искомых постоянных A_i, B_i (i=1,2) и константы c имеется пять условий: в точках $y_1 = 0$, $y_2 = \infty$ выполнены условия (25), два условия непрерывности (26), (27) и кинематическое условие (28). В результате приходим к следующим соотношениям:

$$B_1 = \varphi_1^0, \quad A_2 + B_2 = \varphi_2^0,$$

$$A_1 \mathtt{erf}\left(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}\right) + \varphi_1^0 = A_2 \mathtt{erf}\left(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_2}}\right) + \varphi_2^0 - A_2, \qquad (29)$$

$$A_1 \sqrt{\kappa_1} e^{-\frac{c^2}{4\kappa_1}} = A_2 \sqrt{\kappa_2} e^{-\frac{c^2}{4\kappa_2}}, \qquad (30)$$

$$c = -\frac{1 + A_1 \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) + \varphi_1^0}{A_1 \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) + \varphi_1^0} A_1 \sqrt{\kappa_1} e^{-\frac{c^2}{4\kappa_1}}. \qquad (31)$$

Из (29) и (30) получим

$$A_1 = \frac{(\varphi_2^0 - \varphi_1^0)\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} e^{\frac{c^2(\kappa_2 - \kappa_1)}{4\kappa_1\kappa_2}}}{1 + \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} e^{\frac{c^2(\kappa_2 - \kappa_1)}{4\kappa_1\kappa_2}} \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) - \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_2}})},$$

$$A_2 = \frac{\varphi_2^0 - \varphi_1^0}{1 + \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} e^{\frac{c^2(\kappa_2 - \kappa_1)}{4\kappa_1\kappa_2}} \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) - \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_2}})}.$$

Заметим, что коэффициенты A_1, A_2 отрицательны и функции φ_i монотонно убывают. Так как $\varphi_1^0 > \varphi_2^0$, то

$$\varphi_1^0 \geq \varphi_1(y_1) \geq \varphi_1(l) = \varphi_2(l) \geq \varphi_2(y_2) \geq \varphi_2^0.$$

Из предыдущего неравенства получим оценку для пористости

$$0 < m_0 = \frac{\varphi_1^0}{1 + \varphi_1^0} \leq \phi_i \leq \frac{\varphi_2^0}{1 + \varphi_2^0} = M_0 < 1. \qquad (32)$$

Из представления (31) следует, что коэффициент $c > 0$, так как для пористости справедлива оценка (32) и $A_1 < 0$.

Рассмотрим уравнение (31) для нахождения параметра c. Положим

$$F(c) \equiv ce^{\frac{c^2}{4\kappa_1}} + \frac{1 + A_1 \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) + \varphi_1^0}{A_1 \mathtt{erf}(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) + \varphi_1^0} A_1 \sqrt{\kappa_1}. \qquad (33)$$

Заметим, что при $1 > \varphi_1^0 > \varphi_2^0 > 0$

$$F(0) = \frac{1 + \varphi_1^0}{\varphi_1^0} (\varphi_2^0 - \varphi_1^0)\sqrt{\kappa_2} < 0, \quad F(+\infty) = +\infty,$$

т.е. функция $F(c)$ меняет знак. Поэтому на интервале $(0, \infty)$ имеется хотя бы один корень уравнения (31). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия на начальные данные задачи (23)–(28):

$$l(0) = 0, \quad \varphi_i(x, 0) = \varphi_i^0 = const, \quad i = 1, 2,$$

$$\varphi_1(0, t) = \varphi_1^0 = const, \quad \varphi_2(\infty, t) = \varphi_2^0,$$

$$0 < \varphi_2^0 < \varphi_1^0 < 1.$$

Тогда существует хотя бы одно классическое автомодельное решение задачи (23) – (28), которое обладает свойством $0 < m_0 \le \phi_i \le M_0 < 1$, $i = 1, 2$.

Таким образом, в работе получено точное автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде.

Библиографический список

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. — Ч. 1, 2. — М., 1987.

2. Rajagopal K.L., Tao L. Mechanics of Mixtures. — L., 1995.

3. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — №1/2.

4. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-Driven Fluid Flow in Viscoelastic Rock // Geodin. Acta. — 1998. — V. 11.

5. Tantserev E., Cristophe Y. Galerne, Podladchikov Y. Multiphase Flow in Multi-Component Porous Visco-Elastic Media // The Fourth Biot Conference on Poromechanics. — 2009.

6. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. — М., 1964.

7. Muskat M. The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media. — 1937.

8. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск, 1983.

9. Fowler A. Mathematical Geoscience. Springer-Verlag. — London, 2011.

10. Vardoulakis I. Sand-Production and Sand Internal Erosion: Continuum Modeling // Alert School: Geomechanical and Structural Issues in Energy Production. — 2006.

11. Папин А.А., Ахмерова И.Г., Токарева М.А. Математические модели механики неоднородных сред. — Ч. 1. — Барнаул, 2012.

12. Simpson G., Spiegelman M., Weinstein M.I. Degenerate Dispersive Equations Arising in the Study of Magma Dynamics // Nonlinearity. — 2007. — V. 20.

13. Tokareva M.A. Localization of Solutions of the Equations of Filtration in Poroelastic Medium // Journal of Siberian Federal University. — 2015. — V. 8 (4).

14. Abourabia A.M., Hassan R.M., Morad A.M. Analytical Solutions of the Magma Equations for Molten Rocks in a Granular Matrix // Chaos, Solutions and Fractals. — 2009. — V. 42.

15. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2014. — № 1/2 (85).

16. Golay F., Bonelli S. Numerical Modeling of Suffusion as an Interfacial Erosion Process // European Journal of Environmental and Civil Engineering. — 2010.

17. Wang J., Walters D.A., Settari A., Wan R.G. Simulation of Cold Heavy Oil Production Using an Integrated Modular Approach with Emphasis on Foamy Oil Flow and Sand Production Effects // 1st Heavy Oil Conference. — 2006.

18. Папин А.А., Вайгант В.А., Сибин А.Н. Математическая модель изотермической внутренней эрозии // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/1 (85).

19. Папин А.А., Сибин А.Н. Проблемы математического моделирования внутренней суффозии грунта // Препринт № 1/15. — Барнаул, 2015.

20. Веригин Н.Н. О фильтрации растворов и эмульсий в пористой среде // 2-й Всесоюзный съезд по теор. и прикл. мех. : аннот. докл. — М., 1964.