УДК 512.548.7

О классе Леви, порожденном почти абелевым квазимногообразием нильпотентных групп

В.В. Лодейщикова

Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова (Барнаул, Россия)

On the Levi Class Generated by the Almost Abelian Quasivariety of Nilpotent Groups

V.V. Lodeyshchikova

Polzunov Altai State Technical University (Barnaul, Russia)

Для произвольного класса групп $\mathcal{M}$ обозначим через $L(\mathcal{M})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание любого элемента из G принадлежит $\mathcal{M}$. Класс $L(\mathcal{M})$ групп называется классом Леви, порожденным $\mathcal{M}$. Изучение классов Леви следует рассматривать как шаг в направлении исследования строения групп, покрываемых системой нормальных подгрупп.

Классы Леви были введены под влиянием работы Ф. Леви, в которой дана классификация групп с абелевыми нормальными замыканиями. Р.Ф. Морс доказал, что если $\mathcal{M}$ — многообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ — также многообразие групп. Из работ А.И. Будкина следует, что если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ также является квазимногообразием групп.

Пусть qH_2 — квазимногообразие, порожденное относительно свободной группой в классе нильпотентных групп ступени не выше 2 с коммутантом экспоненты 2. Ранее автором найдены описания классов Леви, порожденных почти абелевыми квазимногообразиями (т.е. неабелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп, все собственные подквазимногообразия которых абелевы) за исключением $L(qH_2)$. Данная работа продолжает исследования классов Леви, порожденных почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп. В ней доказано, что класс $L(qH_2)$ содержит нильпотентную группу ступени 3.

Ключевые слова: группа, многообразие, квазимногообразие, метабелева группа, класс Леви.

For an arbitrary class of groups $\mathcal{M}$ we denote by $L(\mathcal{M})$ the class of all groups G in which the normal closure of every element of G belongs to $\mathcal{M}$. The class $L(\mathcal{M})$ is called the Levi class generated by $\mathcal{M}$. A study of Levi classes should be considered as a step towards studying the structure of groups covered by a system of normal subgroups.

Levi classes were introduced under the influence of Levi's article in which Levi gave the classification of groups with abelian normal closures. R.F. Morse proved that if the class $\mathcal{M}$ is a variety of groups then $L(\mathcal{M})$ is also a variety of groups. It follows from the works of A.I. Budkin that if $\mathcal{M}$ is a quasivariety, then $L(\mathcal{M})$ is a quasivariety of groups, too.

We consider that the quasivariety qH_2 is generated by the relatively free group in the class of nilpotent groups of length at most 2 with the exponent commutant of 2. Earlier we found descriptions of the Levi classes generated by the almost abelian quasivarieties of nilpotent groups (i.e. the nonabelian quasivarieties of nilpotent groups in which all proper subquasivarieties are abelian) except $L(qH_2)$. In this paper, we continue to explore the Levi classes generated by the almost abelian quasivarieties of nilpotent groups. It is proved that the class $L(qH_2)$ contains the nilpotent group of lenght 3.

Key words: group, variety, quasivariety, metabelian group, Levi class.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-26

Для произвольного класса групп $\mathcal{M}$ обозначим через $L(\mathcal{M})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит $\mathcal{M}$. Класс $L(\mathcal{M})$ групп будем называть *классом Леви, порожденным* $\mathcal{M}$. Классы Леви были введены в работе Л.К. Каппе [1] под влиянием работы Ф. Леви [2], в которой дана классификация групп с абелевыми нормальными замыканиями вида $(x)^G$. Р.Ф. Морсом [3] доказано, что если $\mathcal{M}$ — многообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ также многообразие групп. Из работы А.И. Будкина [4] следует, что если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ также является квазимногообразием групп.

Как обычно, $q\mathcal{K}$ — квазимногообразие, порожденное классом групп $\mathcal{K}$ (пишем qG, если $\mathcal{K} = \{G\}$). Обозначим через $\mathcal{N}_c$ многообразие нильпотентных групп ступени не выше c, через $F_n(\mathcal{M})$ — свободную группу ранга n в квазимногообразии $\mathcal{M}$. Всюду в работе при написании тождеств и квазитождеств кванторы всеобщности будут опускаться.

А.И. Будкин [4] доказал, что если $\mathcal{K}$ — произвольное множество нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядков 2 и 5, и в каждой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой, то $L(q\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{N}_3$. В действительности в доказательстве этого результата отсутствие элементов порядка 5 нужно было только для установления того, что всякая 3-порожденная группа из $L(q\mathcal{K})$ нильпотентна класса ≤ 4, поэтому в работе А.И. Будкина и Л.В. Тараниной [5] данный результат был усилен и доказана аналогичная теорема для произвольного множества нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядка 2.

А.И. Будкиным [6], доказано, что если $\mathcal{M}$ — нильпотентное квазимногообразие, $\overline{\mathcal{M}}$ — множество всех конечно-порожденных групп из $\mathcal{M}$, то выполняется равенство $L(q\overline{\mathcal{M}}) = qL(\overline{\mathcal{M}})$. Там же установлено, что если $\mathcal{N}$ — класс всех конечно-порожденных нильпотентных групп, $\mathcal{N}_0$ — класс всех конечно-порожденных нильпотентных групп без кручения, то аналогичное утверждение неверно, и справедливы строгие включения $q\mathcal{N}_0 \subset L(q\mathcal{N}_0)$ и $q\mathcal{N} \subset L(q\mathcal{N})$, откуда, в частности, следуют неравенства $L(q\mathcal{N}_0) \neq qL(\mathcal{N}_0)$ и $L(q\mathcal{N}) \neq qL(\mathcal{N})$.

В работе А.И. Будкина [6] также показано, что квазимногообразия $L(q\mathcal{N})$, $L(q\mathcal{N}_0)$ замкнуты относительно свободных произведений, каждое из этих квазимногообразий содержит не более одного максимального собственного подквазимногообразия и что если квазимногообразие $\mathcal{M}$ замкнуто относительно свободных произведений, то таковым же является квазимногообразие $L(\mathcal{M})$.

Рассмотрим группы, имеющие следующие представления в $\mathcal{N}_2$:

$$H_p = \mathrm{gr}(x, y \parallel [x, y]^p = 1),$$

$$H_{p^s} = \mathrm{gr}(x, y \parallel [x, y]^p = x^{p^s} = y^{p^s} = 1),$$

где $s \in \mathbb{N}$, p — простое число.

Набор qH_{p^s} (исключая qH_{2^1}), qH_p, $qF_2(\mathcal{N}_2)$ (p — простое число) представляет собой полный список почти абелевых квазимногообразий нильпотентных групп (т.е. неабелевых квазимногообразий нильпотентных групп, все собственные подквазимногообразия которых абелевы). В работах [7–9] найдены описания классов Леви, порожденных почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп (исключая $L(qH_2)$).

С.А. Шаховой в [10] доказано, что квазимногообразие $L(qH_{p^2})$ конечно аксиоматизируемо.

В [9] доказано, что если $\mathcal{K}$ — произвольный класс нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 2^n (n — фиксированное натуральное число, $n \geq 2$) с коммутантами экспоненты 2 и в каждой группе из $\mathcal{K}$ элементы порядка 2^m ($0 < m < n$) содержатся в центре этой группы, то класс Леви, порожденный квазимногообразием $q\mathcal{K}$, совпадает с многообразием нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 2^n.

Также в [9] было доказано существование класса $\mathcal{K}$ такого, что $\mathcal{K}$ — класс нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 8 с коммутантами экспоненты 2 и во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, — абелева подгруппа, но класс $L(q\mathcal{K})$ содержит нильпотентную группу ступени 3.

В [11] установлено существование класса $\mathcal{K}$ такого, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, — абелева подгруппа, но класс $L(q\mathcal{K})$ содержит нильпотентную группу ступени 4.

Цель работы — исследование классов Леви, порожденных почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп. Основным результатом данной статьи является

Теорема. *Класс $L(qH_2)$ содержит нильпотентную группу ступени* 3.

Напомним некоторые определения и обозначения. Как обычно, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $x^g = g^{-1}xg$, $[x, y, z] = [[x, y], z]$, $\mathrm{gr}(a_1, a_2, \ldots)$ — группа, порожденная элементами $a_1, a_2, \ldots$, $(x)^G = \mathrm{gr}(x^g \mid g \in G)$ — нормальное замыкание элемента x в группе G, $F_n(x_1, \ldots, x_n)$ — свободная группа, порожденная элементами $x_1, \ldots, x_n$.

Будем использовать следующие хорошо известные тождества, истинные в любой группе:

$$[xy, z] = [x, z]^y [y, z],$$

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z.$$

С основными понятиями теории групп можно познакомиться в [12, 13], а теории квазимногообразий — в [14, 15].

Нам понадобится признак принадлежности конечно определенной группы G квазимногообразию $q\mathcal{K}$, являющийся частным случаем теоремы 2.3.9 [15]: *конечно-определенная группа G принадлежит квазимногообразию $q\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$, $g \neq 1$, существует гомоморфизм φ_g группы G в некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $\varphi_g(g) \neq 1$.*

Доказательство теоремы. Рассмотрим группу H, имеющую в многообразии $\mathcal{N}_2$ представление

$$H = \mathrm{gr}(a, b, c, d \parallel c = [b, a], [a, c] = 1, [b, c] = 1,$$

$$[a, d] = 1, [b, d] = 1, [c, d] = 1, c^2 = 1, d^2 = 1).$$

Легко заметить, что любой элемент группы H однозначным образом представим в виде $h = a^k b^l c^m d^s$, где $0 \le m, s < 2$. С помощью хорошо известных преобразований Тице [16] можно убрать элемент c из множества порождающих. Тогда

$$H = \mathrm{gr}(a, b, d \parallel [a, d] = 1, [b, d] = 1, [a, b]^2 = 1,$$

$$d^2 = 1) = \mathrm{gr}(a, b) \times (d) \cong H_2 \times (d).$$

Следовательно, $H \in qH_2$.

Пусть $F_2(\mathcal{N}_3) = \mathrm{gr}(x_1, x_2)$, $N = \mathrm{gr}([x_2, x_1, x_1]^2, [x_2, x_1, x_2]^2)$. Заметим, что $N \triangleleft F_2(\mathcal{N}_3)$. Рассмотрим $F = F_2(\mathcal{N}_3)/N$. Элементы фактор-группы F будем обозначать так же, как и элементы группы $F_2(\mathcal{N}_3)$. Несложно проверить, что любой элемент F однозначным образом представим в виде

$$f = x_1^k x_2^n [x_2, x_1]^l [x_2, x_1, x_1]^m [x_2, x_1, x_2]^s,$$

где $0 \le m, s < 2$. Поскольку $[x_2, x_1, x_2] \ne 1$, то группа F нильпотентна ступени 3.

Рассмотрим многообразие $\mathcal{R}$, заданное в $\mathcal{N}_3$ тождеством

$$[x, y, x]^2 = 1.$$

Пусть $\widetilde{F} = \mathrm{gr}(x_1, x_2)$ — свободная группа в $\mathcal{R}$. Тогда в $\widetilde{F}$ выполняются следующие соотношения: $[x_2, x_1, x_1]^2 = 1$, $[x_2, x_1, x_2]^2 = 1$. Несложно проверить, что $F \in \mathcal{R}$, значит, $F \cong \widetilde{F}$ и F — свободная группа в многообразии $\mathcal{R}$.

Для доказательства основного результата надо показать, что для любого $f \in F$ нормальное замыкание $(f)^F \in qH_2$ и, следовательно, $F \in L(qH_2)$.

Случай 1. $f = x_1$.

Получаем, что

$$(x_1)^F = \mathrm{gr}(x_1, [x_2, x_1], [x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_2]).$$

В группе $(x_1)^F$ выполняются соотношения $[x_2, x_1, x_1]^2 = 1$, $[x_2, x_1, x_2]^2 = 1$.

По теореме Дика отображение

$$a \to x_1,\ b \to [x_2, x_1],\ c \to [x_2, x_1, x_1],$$
$$d \to [x_2, x_1, x_2]$$

продолжаемо до гомоморфизма $\varphi :\ H \to (x_1)^F$. Несложно проверить, что $ker\varphi = (1)$. Следовательно, $(x_1)^F \in qH_2$.

Пусть теперь

$$f = x_1^{n_1} x_2^{n_2} [x_2, x_1]^l [x_2, x_1, x_1]^m [x_2, x_1, x_2]^s.$$

Случай 2. НОД$(n_1, n_2) = 1$.

Рассмотрим $\overline{F} = F/F' = \mathrm{gr}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$. В этой фактор-группе $\overline{f} = \overline{x}_1^{\,n_1} \overline{x}_2^{\,n_2}$. По теореме о НОД существуют целые числа u, v такие, что $un_1 + vn_2 = 1$. Возьмем $\overline{f}_1 = \overline{x}_1^{\,-v} \overline{x}_2^{\,u}$. Тогда $\overline{f}^{\,u} \overline{f}_1^{\,-n_2} = \overline{x}_1$, $\overline{f}^{\,v} \overline{f}_1^{\,n_1} = \overline{x}_2$.

Значит, элемент $\overline{f}$ можно дополнить до системы порождающих группы $\overline{F}$. Из [12, теорема 16.2.5] следует, что тогда и элемент f можно дополнить до системы порождающих группы F.

Так как F — свободная в $\mathcal{R}$ группа, то отображение $x_1 \to f$ продолжаемо до изоморфизма $\psi :\ F \to F$. Следовательно, $(x_1)^F \cong (f)^F$ и поэтому $(f)^F \in qH_2$.

Случай 2. НОД$(n_1, n_2) = n$.

Рассмотрим элемент $h = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ $(\alpha_1 = \frac{n_1}{n}$, $\alpha_2 = \frac{n_2}{n})$. Заметим, что НОД$(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ и по случаю 2 получаем, что $(h)^F \in qH_2$. Покажем, что $f \in (h)^F$. По определению $(h)^F = \mathrm{gr}(h^g \mid g \in F)$. Рассмотрим следующую последовательность элементов, принадлежащих нормальному замыканию $(h)^F$:

$h_1 = h^{x_1^{\alpha_1}} = x_2^{\alpha_2} x_1^{\alpha_1}$,
$h_2 = h \cdot h_1 = x_1^{\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} x_1^{\alpha_1}$,
$h_3 = h_2^{x_1^{\alpha_1}} = x_2^{2\alpha_2} x_1^{2\alpha_1}$,
$\ldots$
$h_{2k} = h \cdot h_{2k-1} = x_1^{\alpha_1} x_2^{(2k-1)\alpha_2} x_1^{(2k-2)\alpha_1}$,
$h_{2k+1} = h_{2k}^{x_1^{\alpha_1}} = x_2^{(2k-1)\alpha_2} x_1^{(2k-1)\alpha_1}$,
$h_{2k+2} = h \cdot h_{2k+1} = x_1^{\alpha_1} x_2^{2k\alpha_2} x_1^{(2k-1)\alpha_1}$,
$h_{2k+3} = h_{2k+2}^{x_1^{\alpha_1}} = x_2^{2k\alpha_2} x_1^{2k\alpha_1}, k = 2, 3, \ldots$.

Если n — нечетное $(n = 2m - 1)$, то $h_{2m+1} = x_2^{(2m-1)\alpha_2} x_1^{(2m-1)\alpha_1} = x_2^{n_2} x_1^{n_1} \in (h)^F$. Тогда $h_{2m+1}^{x_1^{-n_1}} = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \in (h)^F$.

Если n — четное $(n = 2m)$, то $h_{2m+3} = x_2^{2m\alpha_2} x_1^{2m\alpha_1} = x_2^{n_2} x_1^{n_1} \in (h)^F$. Тогда $h_{2m+3}^{x_1^{-n_1}} = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \in (h)^F$.

Заметим, что $[h, g] = h^{-1} h^g \in (h)^F$ для любого $g \in F$. Рассмотрим следующие элементы, принадлежащие нормальному замыканию $(h)^F$:

$$[h, x_2, x_1] = [x_2, x_1, x_1]^{-\alpha_1}, \tag{1}$$

$$[h, x_1, x_2] = [x_2, x_1, x_2]^{\alpha_2}, \tag{2}$$

$$[h, x_1, x_1] = [x_2, x_1, x_1]^{\alpha_2}, \tag{3}$$

$$[h, x_2, x_2] = [x_2, x_1, x_2]^{-\alpha_1}, \tag{4}$$

$$[h, x_1] = [x_2, x_1]^{\alpha_2} [x_2, x_1, x_2]^{\frac{\alpha_2^2 - \alpha_2}{2}}, \tag{5}$$

$$[h, x_2] = [x_2, x_1]^{-\alpha_1} [x_2, x_1, x_1]^{-\frac{\alpha_1^2 - \alpha_1}{2}} \cdot [x_2, x_1, x_2]^{-\alpha_1 \alpha_2}. \tag{6}$$

Поскольку НОД$(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, то $\alpha_1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ или $\alpha_2 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$.

Если $\alpha_1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, то из (1) и (4) следует, что $[x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_2] \in (h)^F$. Если $\alpha_2 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, то это утверждение получается из (2) и (3).

Так как НОД$(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, то по теореме о НОД найдутся целые числа u_1, u_2 такие, что $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 1$. Заметим, что следующие элементы принадлежат нормальному замыканию $(h)^F$:

$$[x_2, x_1]^{\alpha_1} = [h, x_2]^{-1}[x_2, x_1, x_1]^{-\frac{\alpha_1^2 - \alpha_1}{2}} \cdot$$

$$\cdot [x_2, x_1, x_2]^{-\alpha_1 \alpha_2},$$

$$[x_2, x_1]^{\alpha_2} = [h, x_1][x_2, x_1, x_2]^{-\frac{\alpha_2^2 - \alpha_2}{2}}.$$

Тогда $[x_2, x_1] = [x_2, x_1]^{\alpha_1 u_1}[x_2, x_1]^{\alpha_2 u_2} \in (h)^F$.

Таким образом, $f \in (h)^F$, $(f)^F \subseteq (h)^F$ и $(f)^F \in qH_2$. Получили, что для любого $f \in F$ нормальное замыкание $(f)^F \in qH_2$ и, следовательно, $F \in L(qH_2)$. Таким образом, класс $L(qH_2)$ содержит нильпотентную группу ступени 3 в отличие от класса $L(qH_{2^n})$, который содержит лишь нильпотентные ступени ≤ 2 группы. Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую признательность профессору А.И. Будкину за постановку задачи и ценные замечания, высказанные в ходе подготовки статьи.

Библиографический список

1. Kappe L.C. On Levi-formations // Arch. Math. — 1972. — V. 23, №6.

2. Levi F.W. Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic condition // J. Indian Math. Soc. — 1942. — V. 6.

3. Morse R.F. Levi-properties generated by varieties // The mathematical legacy of Wilhelm Magnus. Groups, geometry and special functions (Contemp. Math., 169), Providence, RI, Am. Math. Soc. — 1994.

4. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сибирский математический журнал. — 1999. — Т. 40, №2.

5. Будкин А.И., Таранина Л.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. — 2000. — Т. 41, №2.

6. Будкин А. И. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Алгебра и логика. — 2000. — Т. 39, №6.

7. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2009. — Т. 61, №1.

8. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. — 2010. — Т. 51, №6.

9. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50, №1.

10. Шахова С.А. Об аксиоматическом ранге квазимногообразия $\mathcal{M}^{p^2}$ // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — Т. 85, №1/2. — С. 179–182. DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-33

11. Лодейщикова В.В. Об одном квазимногообразии Леви экспоненты 8 // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2010. — Т. 65, №1/2.

12. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. — Спб., 2009.

13. Нейман Х. Многообразия групп. — М., 1969.

14. Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий. — Новосибирск, 1999.

15. Будкин А.И. Квазимногообразия групп. — Барнаул, 2002.

16. Магнус В., Каррас В., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. — М., 1974.