УДК 512.81

Об операторах кривизны метрических групп Ли*

С.В. Клепикова, Е.Д. Родионов, О.П. Хромова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On the Curvature Operators of Metric Lie Groups

S.V. Klepikova, E.D. Rodionov, O.P. Khromova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Одной из важных проблем (псевдо)римановой геометрии является задача об установлении связей между кривизной, алгебраической и топологической структурой (псевдо)риманова многообразия. В этом направлении хорошо известны: теорема Адамара — Картана о полном односвязном римановом многообразии неположительной секционной кривизны, теорема М. Громова о римановом многообразии неотрицательной кривизны Риччи, теорема сравнения углов треугольника А.Д. Александрова — В.А. Топоногова, теорема о сфере, экстремальные теоремы в римановой геометрии и ряд других результатов.

В общем случае задача исследования (псевдо)римановых многообразий с ограничениями на кривизну различного типа представляется достаточно сложной. Поэтому естественно рассматривать данную задачу в более узком классе (псевдо)римановых многообразий, например, в классе однородных (псевдо)римановых многообразий и, в частности, в классе метрических групп Ли.

В обзоре приведены результаты по исследованию (псевдо)римановых метрик знакоопределенной кривизны, сигнатур операторов кривизны; освещены вопросы существования локально однородных (псевдо)римановых пространств и, в частности, метрических групп Ли с заданным спектром какого-либо оператора кривизны.

Ключевые слова: алгебры и группы Ли, левоинвариантные (псевдо)римановы метрики, операторы кривизны.

The problem of establishing links between the curvature, the algebraic and topological structure of a (pseudo)Riemannian manifold is one of the important problems of the (pseudo)Riemannian geometry. There are several well known researches and results: the Hadamard — Cartan theorem about the complete simply-connected Riemannian manifold of non-positive sectional curvature, Gromov theorem about Riemannian manifolds of nonnegative Ricci curvature, comparison angles triangle theorem by A.D. Alexandrov — V.A. Toponogov, theorem on the sphere, extreme theorem in the Riemannian geometry and some other results.

In general, the purpose of the research of (pseudo)Riemannian manifolds with restrictions on curvature of various types is rather complicated. Therefore, it is natural to consider this problem in a narrower class of (pseudo)Riemannian manifolds, for example, in the class of homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds and, in particular, in the class of metric Lie groups.

The article presents the results of research of (pseudo) Riemannian metrics of sign-definite curvature, signatures of the curvature operators; the questions of the existence of a locally homogeneous (pseudo) Riemannian spaces and, in particular, the metric Lie groups with a given spectrum any operator curvature.

Key words: Lie algebras and Lie groups, left-invariant (pseudo)Riemannian metrics, curvature operators.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-23

1. Об исследовании метрик знакоопределенной кривизны. Одной из важных проблем (псевдо)римановой геометрии является задача об установлении связей между кривизной и топологией (псевдо)риманова многообразия. В этом направлении хорошо известны: теорема Адамара — Картана о полном односвязном римановом многообразии неположительной секционной кривизны [1], теорема М. Громова о римановом многообразии неотрицательной кривизны Риччи [2], теорема сравнения углов треугольника А.Д. Александрова — В.А. Топоногова [1], теорема о сфере, экстремальные теоремы в римановой геометрии и ряд других результатов.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: №16–01–00336А, №16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Теорема. (Ж. Адамар, Э. Картан [1]) *Каждое полное односвязное риманово многообразие неположительной секционной кривизны диффеоморфно евклидовому пространству.*

Теорема. (А.Д. Александров, В.А. Топоногов [1]) *Пусть M — полное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$; $K_\sigma \geqslant \varkappa \geqslant 0$ для всех касательных к M двумерных плоскостей σ; $\Delta = (c_0, c_1, c_2)$ — треугольник в M с углами γ_0, γ_1, γ_2. Если $\varkappa > 0$ ($\varkappa \geqslant 0$), то существует треугольник $\tilde{\Delta} = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ в $\tilde{M} = S^n_{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}$ (соответственно в $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$) с углами $\tilde{\gamma}_0$, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ и равными соответствующими сторонами, для которого $\gamma_i \geqslant \tilde{\gamma}_i$.*

Теорема о сфере. (В. Клингенберг [1]) *Пусть M — полное односвязное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$, и кривизна M δ-ограничена с $\delta > \frac{1}{4}$, т.е. $\frac{1}{4} < \delta \leqslant K_\sigma \leqslant 1$ для всех касательных плоскостей. Тогда M гомеоморфно сфере S^n.*

В общем случае задача исследования (псевдо)римановых многообразий с ограничениями на кривизну различного типа представляется достаточно сложной [1]. Поэтому естественно рассматривать данную задачу в более узком классе (псевдо)римановых многообразий, например, в классе однородных (псевдо)римановых многообразий и, в частности, в классе метрических групп Ли. Так, М. Берже, Н. Уоллач, Л.Б. Бержери доказали, что однородные пространства, допускающие инвариантную риманову метрику положительной секционной кривизны либо диффеоморфны компактным симметрическим пространствам ранга 1, либо одному из многообразий конечного списка Алоффа — Берже — Уоллача [3–5]. Однородные римановы многообразия неположительной секционной кривизны исследовали Д.В. Алексеевский, Е. Хейнце, Л.Б. Бержери [6–8].

Изучение топологического строения трехмерных групп Ли, на которых существует левоинвариантная риманова метрика положительной кривизны Риччи, стало прогрессировать, начиная с работы Дж. Милнора [9].

Теорема. (Дж. Милнор [9]) *Связная группа Ли G допускает левоинвариантную риманову метрику положительной кривизны Риччи в том и только том случае, если G компактна и ее фундаментальная группа $\pi_1(G)$ конечна. В таком случае искомой метрикой является биинвариантная риманова метрика.*

Позднее В.Н. Берестовский продолжил это исследование в случае однородных римановых пространств [10].

Теорема. (В.Н. Берестовский [10]) *Однородное эффективное пространство $G/H = M$ связной группы Ли G по ее компактной подгруппе H допускает G-инвариантную риманову метрику положительной кривизны Риччи тогда и только тогда, когда пространство M компактно и имеет конечную фундаментальную группу $\pi_1(M)$. При этом в качестве такой метрики можно взять любую нормальную G-инвариантную метрику на G/H.*

Топологическое строение однородных пространств, допускающих однородную риманову метрику положительной одномерной кривизны, изучалось Е.Д. Родионовым и В.В. Славским [11].

Теорема. (Е.Д. Родионов, В.В. Славский [11]) *Связная группа Ли G допускает левоинвариантную риманову метрику положительной одномерной кривизны в том и только том случае, если G компактна и ее фундаментальная группа $\pi_1(G)$ конечна. В таком случае искомой метрикой является стандартная риманова метрика.*

Напомним, что одномерная кривизна риманова многообразия (M^n, g) определяется с помощью квадратичной формы $A(X) = \dfrac{A_{ij}X^iX^j}{g_{ks}X^kX^s}$, где $A_{ij} = \dfrac{1}{n-2}\left(r_{ij} - \dfrac{sg_{ij}}{2(n-1)}\right)$ — тензор одномерной кривизны, r_{ij} — тензор Риччи, s — скалярная кривизна, X^i — координаты вектора $X \in T_xM$.

Если говорить о строении однородных римановых многообразий неположительной кривизны Риччи, то в этом направлении известно немного. Так, И.Д. Миателло в своей работе [12], посвященной исследованию унимодулярных разрешимых групп Ли, на которых существует левоинвариантная риманова метрика неположительной кривизны Риччи, доказала, что в этом случае метрика является Риччи плоской, а значит плоской согласно классической теореме Д.В. Алексеевского — Б.Н. Кимельфельда [13]. Кроме того, известны недавние результаты Ю.Г. Никонорова и Ю.А. Николаевского относительно строения разрешимых групп Ли, допускающих левоинвариантную риманову метрику отрицательной кривизны Риччи [14].

Теорема. (Ю.А. Николаевский, Ю.Г. Никоноров [14]) *Пусть G — разрешимая группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{n}$ — нильрадикал $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{z}$ — центр $\mathfrak{n}$. Тогда*
1) если $\mathfrak{g}$ допускает скалярное произведение отрицательной кривизны Риччи, тогда существует $Y \in \mathfrak{g}$ такой что $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_Y) > 0$ и все собственные значения ограничения оператора ad_Y на $\mathfrak{z}$ имеют положительную действительную часть;
2) если существует $Y \in \mathfrak{g}$ такой, что все собственные значения ограничения оператора ad_Y на $\mathfrak{n}$ имеют положительную действительную часть, тогда $\mathfrak{g}$ допускает скалярное произведение отрицательной кривизны Риччи.

В случае многообразий с псевдоримановой метрикой ситуация представляется менее понятной. Как пример, приведем недавний результат

Дж. Кальварузо и О. Ковальского о предписанных значениях оператора Риччи [15].

Теорема. (Дж. Кальварузо, О. Ковальский [15]) *Трехмерная унимодулярная группа Ли G с левоинвариантной лоренцевой метрикой, алгеброй Ли типа $\mathfrak{g}_3$ и оператором Риччи Ric существует тогда и только тогда, когда оператор Риччи Ric имеет тип Сегре $\{111\}$ с главными значениями r_1, r_2, r_3 такими, что либо $r_1r_2r_3 < 0$, либо наименьшие два из r_i равны нулю.*

Напомним, что алгебра Ли типа $\mathfrak{g}_3$ трехмерной унимодулярной группы Ли G с левоинвариантной лоренцевой метрикой задается структурными уравнениями вида $[e_1, e_2] = -\gamma e_3$, $[e_1, e_3] = -\beta e_2$, $[e_2, e_3] = \alpha e_1$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, а $\{e_1, e_2, e_3\}$ — псевдоортонормированный базис $\mathfrak{g}_3$, в котором ненулевые компоненты метрического тензора $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = 1$.

Также заметим, что *тип Сегре* некоторого оператора B — это список $[d_1d_2 \cdots d_m]$ размерностей жордановых блоков при записи оператора B в каноническом виде (подробнее см. [16]).

Учитывая то, что нашей главной целью является установление связей между кривизной, алгебраическим и топологическим строением (псевдо)риманова многообразия, мы сузим круг рассматриваемых пространств до однородных (псевдо)римановых многообразий, в частности, до метрических групп Ли и выделим следующую задачу — исследовать собственные значения операторов кривизны, а также их влияние на алгебраическое и топологическое строение метрической группы Ли (G, g). В частности,

- определить возможные сигнатуры спектров различных операторов кривизны метрических групп Ли малых размерностей;
- решить вопрос о существовании метрической группы Ли с предписанными значениями какого-либо оператора кривизны.

2. О сигнатурах операторов кривизны. Важную информацию о строении риманова многообразия дает исследование спектров операторов кривизны и, в частности, их сигнатур.

Напомним, что под *сигнатурой* симметрического оператора B, действующего на n-мерном евклидовом пространстве, понимается упорядоченный набор $(\mathrm{sgn}(\tau_1), \mathrm{sgn}(\tau_2), \ldots, \mathrm{sgn}(\tau_n))$, где $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n$ — собственные значения оператора B, и $\mathrm{sgn}(x)$ означает знак (вещественного) числа x.

Оператор Риччи и оператор одномерной кривизны (псевдо)риманова многообразия (M, g) будем обозначать, соответственно, Ric и $\mathcal{A}$ и определять равенствами $r(X, Y) = g(\mathrm{Ric}(X), Y)$, $A(X, Y) = g(\mathcal{A}(X), Y)$.

В случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой возможные сигнатуры спектра оператора Риччи установлены Дж. Милнором в [9]. Для трехмерных унимодулярных групп Ли данный результат приведен в таблице 1.

Теорема. (Дж. Милнор [9]) *Оператор кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на трехмерных группах Ли не может иметь сигнатур* $(-, 0, +)$, $(-, +, +)$ *и* $(0, +, +)$.

Таблица 1

Возможные сигнатуры оператора кривизны Риччи 3-мерных унимодулярных групп Ли с левоинваринтной римановой метрикой

Унимодулярная группа Ли	Сигнатуры оператора Ric
$SU(2)$	$(+, +, +)$, $(-, 0, +)$, $(-, -, +)$
$SL(2, \mathbb{R})$	$(-, -, +)$, $(-, 0, 0)$
$E(2)$	$(-, -, +)$
$E(1, 1)$	$(-, -, +)$, $(-, 0, 0)$
H – группа Гейзенберга	$(-, -, +)$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$(0, 0, 0)$

Возможные сигнатуры оператора Риччи четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой указаны Ю.Г. Никоноровым и А.Г. Кремлевым в [17, 18].

Теорема. (А.Г. Кремлев, Ю.Г. Никоноров [17, 18]) *Оператор кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли не может иметь сигнатур* $(0, 0, +, +)$ *и* $(+, +, +, +)$.

Аналогичные исследования в размерности 5 и выше проводились лишь для отдельных классов римановых многообразий и могут быть найдены, например, в работах А.Г. Кремлева и М.С. Чебарыкова [19, 20].

Для трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой возможные сигнатуры спектра оператора одномерной кривизны, а также области знакопостоянства сигнатур операторов Риччи и одномерной кривизны определены Д.С. Вороновым, Е.Д. Родионовым, В.В. Славским и О.П. Хромовой в [21–24].

Теорема. (Д.С. Воронов, О.П. Хромова [21]) *Оператор одномерной кривизны левоинвариантных римановых метрик на трехмерных группах Ли не может иметь только сигнатуру* $(-, 0, 0)$.

Исследование спектра оператора кривизны $\mathcal{R} : \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M$, определяемого равенством $\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V)\rangle_x = R_x(X, Y, T, V)$, где $R_x(X, Y, T, V) = g_x(R(X, Y)T, V)$ — тензор кривизны, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в слоях пространства расслоения ΛM, индуцированное (псевдо)римановой метрикой g и задаваемое правилом $\langle X_1 \wedge \ldots \wedge X_p, Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_p\rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_j))$, и его связи с топологией однородного риманова многообразия проводилось Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, О.П. Хромовой (см. подробнее [25, 26]). В частности, ими определены возможные сигнатуры оператора кривизны четырехмерных групп Ли, снабженных конформно (полу)плоской метрикой [27], т.е. у которой либо тензор Вейля $W = 0$, либо часть компонент тензора Вейля равны нулю.

Теорема. (Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, О.П. Хромова [25]) *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная 4-мерная алгебра Ли группы Ли G с конформно полуплоской левоинвариантной римановой метрикой. Тогда в базисе внешних форм (бивекторов) пространства $\Lambda^{\pm}\mathfrak{g}$ в матрице оператора кривизны на диагонали стоят секционные кривизны. Если, более того, $W = 0$, или, что то же самое, метрика конформно плоская, то матрица оператора кривизны диагональная, и на диагонали стоят секционные кривизны.*

Теорема. (Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, О.П. Хромова [26]) *Главные значения операторов Риччи $\{r_i\}$ и одномерной кривизны $\{a_i\}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ на n-мерной конформно плоской метрической группе Ли могут принимать не более двух различных значений. При этом, если $r_i \neq r_j$ (соответственно $a_i \neq a_j$), то секционные кривизны $K_{ij} = 0$.*

Теорема. (Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, О.П. Хромова [27]) *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная 4-мерная алгебра Ли группы Ли G с левоинвариантной конформно полуплоской римановой метрикой. Тогда спектр оператора кривизны $\mathcal{R}$ может иметь только сигнатуры* $(-,-,-,-,-,-)$, $(-,-,-,0,0,0)$, $(0,0,0,0,0,0)$, $(0,0,0,+,+,+)$.

В лоренцевом случае операторы кривизны Риччи Ric и одномерной кривизны $\mathcal{A}$ могут иметь как вещественные, так и комплексные собственные значения. Поэтому задача об исследовании сигнатур корректна лишь для симметрических операторов $\mathtt{R}$ и $\mathtt{A}$, матрицы которых совпадают с матрицами тензоров Риччи и одномерной кривизны соответственно. Их возможные сигнатуры на трехмерных группах Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками указаны С.В. Клепиковой, О.П. Хромовой в [28, 29]. Также С.В. Клепиковой и О.П. Хромовой определены возможные сигнатуры оператора кривизны $\mathcal{R}$ трехмерных групп Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками [30].

Теорема. (С.В. Клепикова, О.П. Хромова [28–30]) *Операторы $\mathtt{R}$, $\mathtt{A}$, $\mathcal{R}$ на трехмерных группах Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками могут иметь сигнатуру любого типа.*

Так, возможные сигнатуры оператора $\mathtt{R}$ на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинваринтной лоренцевой метрикой исчерпываются таблицей 2.

Таблица 2

Возможные сигнатуры оператора кривизны $\mathtt{R}$ 3-мерных унимодулярных групп Ли с левоинваринтной лоренцевой метрикой

Унимодулярная группа Ли	Сигнатуры оператора $\mathtt{R}$
$SU(2)$	$(-,-,+)$, $(0,0,+)$, $(+,+,+)$
$SL(2,\mathbb{R})$	$(-,-,+)$, $(-,0,0)$, $(0,0,+)$, $(+,+,+)$
$E(2)$	$(-,-,+)$, $(0,0,0)$, $(0,0,+)$, $(+,+,+)$
$E(1,1)$	$(-,-,+)$, $(-,0,0)$, $(0,0,0)$, $(0,0,+)$, $(+,+,+)$
H	$(-,-,+)$
$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	$(0,0,0)$

3. О предписанных значениях операторов кривизны. По исследованию собственных значений операторов кривизн на локально однородных римановых многообразий размерности 3 хорошо известна работа [31], в которой О. Ковальский и С. Никшевич нашли необходимые и достаточные условия существования метрических групп Ли и римановых локально-однородных пространств с предписанными значениями спектра оператора Риччи.

Теорема. (О. Ковальский, С. Никшевич [31]) *Локально однородное трехмерное риманово многообразие с главными кривизнами Риччи (r_1, r_2, r_3) существует в том и только в том случае, если числа r_i удовлетворяют хотя бы одному из условий:*
1) все r_i равны или два из них равны, а последний равен нулю;
2) $r_1r_2r_3 > 0$ или наименьшие два из r_i равны нулю;
3) все $r_i \leq 0$, самое большое один из них нуль, и (с точностью до перестановки) $2r_1 < r_2 + r_3$, $r_1(r_2 + r_3) \leq r_2^2 + r_3^2$.

Аналогичные результаты для операторов одномерной и секционной кривизн получены Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, О.П. Хромовой [25, 32]. Например, была доказана следующая теорема.

Теорема. (Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, О.П. Хромова [25,32]) *Локально однородное трехмерное риманово многообразие (M, g) с главными значениями оператора секционной кривизны $(\sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})$ существует в том и только в том случае, если числа σ_{ij} (с точностью до перестановки) удовлетворяют хотя бы одному (возможно, нескольким) из условий:*
1) два числа σ_{ij} равны нулю;
2) $(\sigma_{12}+\sigma_{23})(\sigma_{23}+\sigma_{31})(\sigma_{31}+\sigma_{12}) > 0$ или по крайней мере два из чисел $\sigma_{12}+\sigma_{23}$, $\sigma_{23}+\sigma_{31}$, $\sigma_{31}+\sigma_{12}$ нули;

3) $\sigma_{31}\sigma_{12} \leqslant (\sigma_{23})^2 < \left(\frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2}\right)^2$, $\frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2} < \sigma_{23}$.

В лоренцевом случае хорошо известна работа Дж. Кальварузо, О. Ковальского [15], в которой найдены условия существования трехмерных метрических групп Ли и локально однородных лоренцевых многообразий с заданными собственными значениями оператора Риччи.

Теорема. (Дж. Кальварузо, О. Ковальский [15]) *Локально однородное трехмерное лоренцево многообразие* (M, g) *с недиагонализируемым оператором Риччи Ric существует в том и только в том случае, если выполняются следующие взаимоисключающие утверждения.*
1) Оператор Ric имеет тип Сегре $\{3\}$ *с тройным главным значением* $r_1 < 0$.
2) Оператор Ric имеет тип Сегре $\{1z\bar{z}\}$ *с действительным главным значением* $r_1 < 0$.
3) Оператор Ric имеет тип Сегре $\{21\}$ *с главным значением* $r_1 = r_2 < 0$, $r_3 \neq r_1$ *в невырожденном случае и с* $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ *в вырожденном случае.*

Аналогичная задача для трехмерных групп Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками и предписанными собственными значениями оператора одномерной кривизны решена П.Н. Клепиковым [33].

Теорема. (П.Н. Клепиков [33]) *Трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лор. метрикой, допускающая базис типа A1, и оператором одномерной кривизны* $\mathcal{A}$ *существует, если и только если* $\mathcal{A}$ *имеет тип Сегре* $\{111\}$ *и собственные значения* a_1, a_2, a_3 *удовлетворяют условиям: либо* $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, *либо два из чисел* a_1, a_2, a_3 *равны друг другу и равны* $-(a_1 + a_2 + a_3)$, *либо* $(2a_1+a_2+a_3)(a_1+2a_2+a_3)(a_1+a_2+2a_3) < 0$.

Кроме того, в лоренцевом случае П.Н. Клепиковым, С.В. Клепиковой, О.П. Хромовой полностью исследован вопрос о существовании метрических групп Ли размерности 3 с заданными значениями спектра операторов $\mathtt{R}$ и $\mathtt{A}$ [34, 35]. Например, были доказаны следующие утверждения.

Теорема. (С.В. Клепикова, О.П. Хромова [34]) *Унимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и главными значениями* r_1, r_2, r_3 *оператора* $\mathtt{R}$ *существует в том и только в том случае, если либо по крайней мере два из чисел* r_i *нули, либо* $r_1r_2r_3 > 0$.

Теорема. (С.В. Клепикова, О.П. Хромова [35]) *Трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, допускающая базис типа A1, и собственными значениями* a_1, a_2, a_3 *оператора* $\mathtt{A}$ *существует, если и только если либо* $(2a_1 - a_2 - a_3)(a_1 - 2a_2 - a_3)(a_1 - a_2 - 2a_3) > 0$, *либо не менее двух множителей произведения* $(2a_1 - a_2 - a_3)(a_1 - 2a_2 - a_3)(a_1 - a_2 - 2a_3)$ *равны нулю.*

4. О конформно (полу)плоских метриках. Напомним, что (псевдо)риманово многообразие (M^n, g), $n \geq 4$ является *конформно плоским* тогда и только тогда, когда его тензор Вейля тривиален.

Конформно плоские метрики представляют интерес в задачах геометрии и анализа, так как допускают эффективное вычислительное преставление. В римановом случае они служат обобщением изотермических координат (см. [36]). Кроме того, в классе конформно плоских римановых многообразий существует базис специального вида, в котором матрицы операторов кривизны диагонализируемы [26, 37].

Любое двумерное (псевдо)риманово многообразие является конформно плоским (см. подробнее [38]). В трехмерном случае тензор Вейля W всегда равен нулю, а его роль играет тензор Схоутена-Вейля, определяемый формулой $SW_{ijk} = A_{ij,k} - A_{ik,j}$, где $A_{ij,k}$ — ковариантные производные тензора одномерной кривизны A_{ij}. И многообразие является конформно плоским тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор Схоутена-Вейля. В общем случае задача классификации конформно плоских многообразий до сих пор не решена.

В случае однородных римановых пространств исчерпывающий ответ на эту проблему дали Д.В. Алексеевский и Б.Н. Кимельфельд [39]. Чуть ранее аналог данной классификации получил К. Тсукада [40, 41]. В частности, для односвязного случая справедлива следующая теорема (в общем случае, включая неодносвязный, см. [39]).

Теорема. (Д.В. Алексеевский, Б.Н. Кимельфельд [39]) *Всякое связное односвязное конформно плоское однородное риманово многообразие, допускающее транзитивную группу движений, гомотетично евклидову пространству, либо сфере, либо пространству Лобачевского, либо прямому произведению пространства Лобачевского на евклидову прямую, либо прямому произведению пространства Лобачевского на сферу.*

В псевдоримановом случае данная проблема является более сложной. Даже в случае однородных лоренцевых пространств классификация, как правило, зависит от формы оператора кривизны. В размерности 3 конформно плоские однородные лоренцевы многообразия были полностью классифицированы независимо К. Хонда, К. Тсукада и Дж. Кальварузо [42, 43]. В данной классификации в отличие от риманова случая показано существование несимметричных примеров. В размерности 4 задача классификации конформно плоских однородных пространств полностью решена Дж. Кальварузо как для лоренцевой, так и для нейтральной сигнатуры в [45]. Основная идея данной работы заключалась в том, чтобы определить типы Сегре [16] оператора Риччи.

Расширяя результаты [42], К. Хонда и К. Тсукада решили проблему классификации для однородных лоренцевых многообразий любой размерности с диагонализируемым оператором Риччи [44].

Теорема. (К. Хонда, К. Тсукада [42]) *Пусть M_q^n — n-мерное конформно плоское однородное псевдориманово многообразие. Если оператор Риччи диагонализируем, тогда M_q^n локально изометрично одному из следующих многообразий:*

1. $M_q^n(k)$,
2. $M_{q'}^m(k) \times M_{q-q'}^{n-m}(-k)$, $k \neq 0$, $2 \leqslant m \leqslant n-2$,
3. $M_q^{n-1}(k) \times \mathbb{R}$ *или* $M_{q-1}^{n-1}(k) \times \mathbb{R}_1$, $k \neq 0$,

где $M_q^m(k)$ — многообразие постоянной секционной кривизны k и индекса q.

В четырехмерном случае, наряду с конформно плоскими метриками, можно рассматривать и конформно полуплоские, которые возникают при разложении тензора Вейля в прямую сумму неприводимых компонент относительно действия специальной ортогональной группы (см. [38]). Известна следующая теорема.

Теорема. (Н. Хитчин [38]) *Пусть M — компактное конформно полуплоское многообразие Эйнштейна. Тогда*

1. *Если $s > 0$, то M изометрично S^4 или $\mathbb{CP}^2$ со стандартными метриками.*
2. *Если $s = 0$, то M либо плоско, либо накрывается $K3$-поверхностью с метрикой Калаби — Яу.*

Естественной является задача классификации конформно полуплоских римановых многообразий. В общем случае проблема остается открытой. В [38] приведены примеры четырехмерных римановых многообразий, снабженных конформно полуплоской метрикой. Полная классификация 4-мерных конформно полуплоских метрических групп Ли дана Е.Д. Родионовым, В.В. Славским и О.П. Хромовой в [46, 47].

Теорема. (Е.Д. Родионов, В.В. Славский, О.П. Хромова [46,47]) *Вещественная четырехмерная группа Ли с левоинвариантной конформно полуплоской римановой метрикой либо конформно плоская, либо алгебра Ли группы Ли есть алгебра $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$ $(-1 < \beta \leqslant 1)$ или $\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$.*

5. О (почти)гармоничности тензорных полей. Существуют несколько подходов к определению гармоничности.

Определение. Тензор $T_{i_1 \dots i_p}$ строения $(p, 0)$ называется *гармоническим* (см. [48, с. 43]), если выполняются следующие три условия:

(1) $T_{i_1 \dots i_p}$ — кососимметрический,

(2) $\mathrm{rot}(T_{i_1 i_2 \dots i_p}) = 0$ или
$T_{i_1 i_2 \dots i_p ; t} = T_{t i_2 \dots i_p ; i_1} + T_{i_1 t \cdots i_p ; i_2} +$
$+ \dots + T_{i_1 i_2 \dots t ; i_p}$,

(3) $\mathrm{div}(T_{i_1 i_2 \dots i_p}) = g^{i_1 t} T_{i_1 \dots i_p ; t} = 0$,

и *почти гармоническим* (см. [49–51]), если выполняются следующие два условия:

(1) $\mathrm{rot}(T_{i_1 i_2 \dots i_p}) = 0$,

(2) $\mathrm{div}(T_{i_1 i_2 \dots i_p}) = g^{i_1 t} T_{i_1 \dots i_p ; t} = 0$.

Активное изучение гармонических тензоров, в смысле данного определения, началось с работы К. Яно и С. Бохнера [48].

Как отмечалось выше, тензор Схоутена-Вейля в размерности 3 является аналогом тензора конформной кривизны. Поэтому изучение его свойств представляет интерес. Поскольку тензор Схоутена-Вейля обладает косой симметрией лишь по последней паре индексов, то корректным является вопрос об изучении его почти гармоничности.

Полная классификация трехмерных метрических групп Ли с левоинвариантными (псевдо)римановыми и почти гармоническим тензором Схоутена-Вейля дана О.П. Хромовой в [49] (см. также [50–53]. В лоренцевом случае часть результатов получена совместно с П.Н. Клепиковым и С.В. Клепиковой [28]. Кроме того, данным коллективом классифицированы трехмерные группы Ли, снабженные (псевдо)римановой метрикой и гармонической сверткой тензора Схоутена-Вейля [28, 49, 54, 55].

Также имеет место (см. [38, 56])

Определение. Риманово многообразие (M, g) размерности $n \geq 4$ называется *C-пространством* или *пространством с гармоническим тензором Вейля*, если $\mathrm{div} W = 0$.

Простейшими примерами многообразий с гармоническим тензором Вейля являются:

1. Многообразия, локально изометричные произведению многообразий Эйнштейна.
2. Конформно плоские многообразия ($W = 0$).

Другие примеры многообразий с гармоническим тензором Вейля можно получить с помощью конформных деформаций. При конформной деформации $g' = e^{2f} g$ метрики g в n-мерном случае тензор $\mathrm{div} W$ преобразуется по формуле (см. [38])

$$\mathrm{div} W_{g'} = \mathrm{div} W - (n-3) W(Df, ., ., .).$$

Поэтому можно взять риманово многообразие, локально изометричное прозведению многообразий Эйнштейна, и искать на нем такую функцию f, что $W(Df, ., ., .) = 0$.

Также известен следующий общий результат.

Теорема. (Д. Де Тюрк, Х. Гольдшмидт [38]) *Пусть (M, g) — риманово многообразие с гармоническим тензором Вейля и* $\dim M = n \geqslant 4$. *Предположим, что в некоторой точке $x \in M$ тензор r_x имеет n различных значений и $W_x = 0$. Тогда многообразие (M, g) конформно плоско.*

В римановом случае Е.Д. Родионовым, В.В. Славским и О.П. Хромовой получена классификация четырехмерных групп Ли с гармоническим тензором Вейля [24, 57–59]. В частности, установлено следующее.

Теорема. (В.В. Славский, О.П. Хромова [57]) *Пусть G — действительная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда* $\mathrm{div} W = 0$ *в том и только в том случае, если группа G локально изоморфна либо группе R^4, либо прямому произведению $E(2) \times R^1$, либо полупрямому произведению групп $SU(2) \times R^1$. Все найденные метрики локально симметрические, а первые две плоские.*

Аналогичная классификационная задача для метрических групп Ли размерностей 3 и 4 с гармоническим тензором концциркулярной кривизны решена П.Н. Клепиковым и О.П. Хромовой [60, 61].

Теорема. (П.Н. Клепиков, О.П. Хромова [61]) *Пусть G — вещественная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда, если* $\mathrm{div}\, Z = 0$, *то алгебра Ли есть алгебра $\mathbb{R}^4$, либо $e(2) \oplus \mathbb{R}$, либо $su(2) \oplus \mathbb{R}$. Причем в первых двух случаях обязательно выполняется $Z = 0$.*

Напомним, что тензор концциркулярной кривизны (псевдо)риманова многообразия (M^n, g) определяется равенством $Z = R - \dfrac{s}{2n(n-1)} g \owedge g$ и является инвариантом концциркулярных преобразований (т.е. таких нетривиальных конформных преобразований, которые переводят геодезические окружности в геодезические окружности (см. подробнее [62])).

Библиографический список

1. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. — М., 1971.

2. Громов М. Знак и геометрический смысл кривизны. — Ижевск, 1999.

3. Berger M. Les varietes riemannienes homogenes normales a courbure strictement positive // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. — 1961. — V. 15.

4. Wallach N.R. Compact homogeneous Riemannian manifoldswith strictly positive curvature // Ann. Math. — 1972. — V. 2, № 96.

5. Bergery L.B. Les varietes riemannienes invariantes homogenes simplement connexes de dimension impaire a courbure strictement positive // J. Math. Pur. Appl. IX. Ser. — 1976. — V. 55, № 1.

6. Alekseevskii D.V. Homogeneous Riemannian spaces of negative curvature // Math. Sb. (N.S.) — 1975. — V. 96.

7. Heintze E. On homogeneous manifolds of negative curvature // Mat. Ann. — 1974. — V. 211.

8. Bergery L.B. Sur la courbure des metriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogenes // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. — 1978. — V. 4, № 11.

9. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — V. 21.

10. Berestovskii V.N. Homogeneous Riemannian manifolds of positive Ricci curvature // Math. Notes. — 1995. — V. 58.

11. Родионов Е.Д., Славский В.В. Одномерная секционная кривизна римановых многообразий // ДАН. — 2002. — Т. 387, № 4.

12. Dotti Miatello I. Ricci curvature of left invariant metrics on solvable unimodular Lie groups // Mathematische Zeitschrift. — 1982. — V. 180.

13. Alekseevskii D.V., Kimelfeld B.N. Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature // Funct. Anal. Appl. — 1975. — V. 9.

14. Nikolayevsky Y., Nikonorov Yu.G. On solvable Lie groups of negative Ricci curvature // Math. Z. — 2015. — V. 280.

15. Calvaruso G., Kowalski O. On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds // Cent. Eur. J. Math. — 2009. — V. 7 (1).

16. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt E. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. — Cambridge, 2003.

17. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. — 2008. — Т. 11, № 2.

18. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. — 2009. — Т. 12, № 1.

19. Кремлев А.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на пятимерных нильпотентных группах Ли // Сибирские электронные известия. — 2009. — Т. 6.

20. Чебарыков М.С. О кривизне Риччи неунимодулярных разрешимых метрических алгебр Ли // Мат. труды. — 2010. — Т. 13, № 1.

21. Воронов Д.С., Гладунова О.П. Сигнатура оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой

метрикой // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2010. — № 1/2.

22. Воронов Д.С., Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. Об инвариантных тензорных полях на группах Ли малых размерностей // Владикавказский математический журнал. — 2012. — Т. 14, вып. 2.

23. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. Области знакоопределенной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2012. — № 1/1.

24. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. Инвариантные тензорные поля на группах Ли // Вестник КемГУ: риманова геометрия. — 2011. — № 3/1.

25. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. О вычислении спектра оператора кривизны конформно (полу)плоских римановых метрик // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2013. — № 1/2.

26. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. О спектре операторов кривизны конформно плоских групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 461, № 5.

27. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. О спектре оператора кривизны четырехмерных конформно плоских метрических групп Ли // Ломоносовские чтения на Алтае : сб. науч. ст. Междунар. школы-семинара, Барнаул, 5–8 ноября, 2013 : в 6 ч. — Барнаул, 2013. — Ч. 1.

28. Пастухова С.В., Хромова О.П. О сигнатуре оператора тензора кривизны Риччи трехмерных групп Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2.

29. Пастухова С.В., Хромова О.П. О сигнатуре оператора одномерной кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками //МАК 2015 : сб. тр. восемнадцатой региональной конф. по математике. — Барнаул, 2015.

30. Пастухова С.В., Хромова О.П. О сигнатуре оператора тензора секционной кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками // Дни геометрии в Новосибирске : тезисы Междунар. конф. — Новосибирск, 2015.

31. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedicata. — 1996. — № 1.

32. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О спектре оператора кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. — 2013. — Т. 450, № 3.

33. Клепиков П.Н. О допустимых значениях спектра оператора одномерной кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники : сб. тр. Всеросс. конф., Барнаул, 24–26 ноября, 2015. — Барнаул, 2015.

34. Пастухова С.В., Хромова О.П. О предписанных значениях операторов тензоров Риччи и одномерной кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками // Дни геометрии в Новосибирске : тезисы Междунар. конф. — Новосибирск, 2015.

35. Клепикова С.В., Хромова О.П. О спектре оператора тензора одномерной кривизны левоинвариантных лоренцевых метрик трехмерных групп Ли // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники : сб. тр. Всеросс. конф., Барнаул, 24–26 ноября, 2015. — Барнаул, 2015.

36. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия. — 2006. — Т. 37.

37. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий // ДАН. — 2013. — Т. 450, № 2.

38. Бессе А. Многообразия Эйнштейна : в 2 т. — М., 1990.

39. Алексеевский Д.В., Кимельфельд Б.Н. Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий // Мат. заметки. — 1978. — Т. 24. — № 1.

40. Takagi H. Conformally flat Riemannian manifolds admitting a transitive group of isometries // Tohoku Math. J. — 1975. — V. 27, № 1.

41. Takagi H. Conformally flat Riemannian manifolds admitting a transitive group of isometries II // Tohoku Math. J. — 1975. — V. 27, № 3.

42. Honda K., Tsukada K. Three-dimensional conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — V. 40.

43. Calvaruso G. Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds // Geom. Dedicata. — 2007. — V. 127.

44. Honda K., Tsukada K. Conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds // Proceedings of the conference “GELOGRA”. — Granada, 2011.

45. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds // Tohoku math. J. — 2014. — V. 66, № 1.

46. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О конформно полуплоских 4-мерных группах Ли // Владикавказский математический журнал. — 2011. — Т. 13, № 3.

47. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О конформно полуплоских 4-мерных алгебрах Ли // ДАН. — 2012. — Т. 442, № 3.

48. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. — М., 1957.

49. Гладунова О.П. Применение пакетов аналитических вычислений для нахождения инвариантных тензорных полей на однородных пространствах : дисс. ... канд. ф.-м. наук. — Барнаул, 2008.

50. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. — 2008. — Т. 419. — № 6.

51. Gladunova O.P., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Harmonic Tensors on Three-Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Lorentz Metric // Journal of Mathematical Sciences, New York. — 2014. — V. 198. — № 5.

52. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // ДАН. — 2009. — Т. 428. — № 6.

53. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Вестник НГУ: Математика, механика, информатика. — 2012. — Т. 12., вып. 1.

54. Родионов Е., Славский В., Гладунова О. О компонентах разложения тензора кривизны на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой. — Saarbrucken, 2012.

55. Балащенко В.В., Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Однородные пространства: теория и приложения. — Ханты-Мансийск, 2008.

56. Listing M. Conformal Einstein spaces in N-dimensions // Ann. Global Anal. Geom. 2001. — V. 20.

57. Гладунова О.П., Славский В.В. О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Мат. труды. — 2011. — Т. 14. — № 1.

58. Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных разложимых группах Ли // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2014. — № 1/1.

59. Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных неразложимых группах Ли // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2014. — № 1/2.

60. Клепиков П.Н., Хромова О.П. О гармоничности тензора концекулярной кривизны левоинвариантных (псевдо)римановых метрик трехмерных групп Ли // Анализ, геометрия и топология : тр. Всеросс. молодежной школы-семинара, Барнаул, 2–4 октября, 2013 : в 2 ч. — Барнаул, 2013. — Ч. 1.

61. Клепиков П.Н., Хромова О.П. Четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором концикулярной кривизны // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2014. — № 1/2.

62. Yano K. Concircular geometry, I–IV // Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1940. — V. 16.