УДК 514.764.2

О спектре операторов одномерной кривизны левоинвариантных лоренцевых метрик трехмерных групп Ли*

П.Н. Клепиков, С.В. Клепикова, О.П. Хромова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On the Spectrum of One-Dimensional Curvature operators on Three-Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Lorentzian Metrics

P.N. Klepikov, S.V. Klepikova, O.P. Khromova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Одной из важных проблем римановой геометрии является задача об установлении связей между топологией и кривизной риманова многообразия. В однородном случае хорошо известны результаты Дж. Милнора, В.Н. Берестовского, Е.Д. Родионова, В.В. Славского о связи между кривизной Риччи, одномерной кривизной и топологией однородного риманова пространства.

Кривизны левоинвариантных римановых метрик на группах Ли исследовались Дж. Милнором, а именно в случае 3-мерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой им были найдены возможные сигнатуры оператора Риччи. Позднее О. Ковальский, С. Никшевич решили задачу о предписанных значениях оператора Риччи на 3-мерных метрических группах Ли, а также 3-мерных римановых локально-однородных пространствах. Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, О.П. Хромовой получены аналогичные результаты для оператора одномерной кривизны, а также для оператора секционной кривизны.

В случае левоинвариантных лоренцевых метрик на группах Ли ситуация представляется менее очевидной. В данной работе решена задача о предписанных значениях оператора одномерной кривизны. Также определены возможные сигнатуры формы одномерной кривизны на 3-мерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой.

Ключевые слова: алгебры Ли, группы Ли, левоинвариантные лоренцевы метрики, операторы кривизны, спектр.

The problem of the establishing of connections between topology and curvature of a Riemannian manifold is one of the important problems of Riemannian geometry. J. Milnor, V.N. Berestovskii, E.D. Rodionov, V.V. Slavskii studies on the connection among the Ricci curvature, one-dimensional curvature and topology of the homogeneous Riemannian space are well known in the homogeneous case .

The curvatures of left-invariant Riemannian metrics on Lie groups were studied by J. Milnor. Namely, possible signatures of the Ricci operator were found in the case of three-dimensional Lie groups with a left-invariant Riemannian metric. Futher, O. Kowalski and S. Nikcevic found three-dimensional metric Lie groups and three-dimensional Riemannian locally homogeneous spaces with prescribed values of the Ricci operator. Similar results were obtained by D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov, O.P. Khromova for the one-dimensional curvature operator and the sectional curvature operator.

The situation is less clear in the case of left-invariant Lorentzian metrics on Lie groups. In this paper, we consider the problem of the prescribed values for the operator of one-dimensional curvature. Besides, we define the possible signatures of the form of one-dimensional curvature on three-dimensional Lie groups with a left-invariant Lorenzian metric.

Key words: Lie algebras, Lie groups, left-invariant Lorentzian metrics, curvature operators, spectrum.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-21

1. Введение, постановка задачи. Важную информацию о строении риманова многообразия дает изучение спектров операторов кривизны и, в частности, их сигнатур. В этом направлении известны работы таких математиков, как

*Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Дж. Милнора, Дж. Кальварузо, О. Ковальского, С. Никшевича, Ю.Г. Никонорова, Е.Д. Родионова, В.В. Славского и др. Так, в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой возможные сигнатуры спектра оператора Риччи определены Дж. Милнором [1]. Возможные сигнатуры оператора Риччи четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой указаны Ю.Г. Никоноровым и А.Г. Кремлевым [2, 3].

Более сложная ситуация складывается в лоренцевом случае, где операторы кривизны Риччи и одномерной кривизны могут иметь как действительные, так и комплексные значения (см. подробнее [4]). Поэтому задача об исследовании сигнатур корректна лишь для соответствующих квадратичных форм.

Другим актуальным направлением в исследовании операторов кривизны являются задачи о восстановлении (псевдо)риманова многообразия по предписанному спектру оператора кривизны. О. Ковальский и С. Никшевич определили римановы локально-однородные пространства с предписанными значениями спектра оператора Риччи [5]. В случае левоинвариантных лоренцевых метрик на трехмерных группах Ли известна работа Дж. Кальварузо, О. Ковальского [4], в которой исследуется задача о существовании группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и заданными значениями спектра оператора Риччи.

Что касается истории исследований кривизны левоинвариантных (псевдо)римановых метрик на группах Ли, то более подробная информация содержится в [6–12].

Основная цель данной работы — изучить вопрос о предписанных значениях оператора одномерной кривизны на трехмерных метрических группах Ли, исследовать сигнатуры формы одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой.

2. Основные определения и обозначения. Пусть (G, g) — n-мерная группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g, $\{\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]\}$ — соответствующая алгебра Ли. Пусть ∇ — связность Леви-Чивита.

При исследовании (псевдо)римановых многообразий важную роль играет тензор одномерной кривизны, определяемый формулой

$$A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right).$$

Он представляет собой целую часть от деления тензора кривизны на метрический тензор относительно произведения Кулкарни-Номидзу (см. [13]). С помощью тензора одномерной кривизны определим оператор одномерной кривизны $\mathcal{A}$ по правилу

$$A(X,Y) = g(\mathcal{A}(X), Y),$$

где g — метрический тензор (псевдо)риманова многообразия.

Также определим квадратичную форму оператора одномерной кривизны с помощью равенства

$$\mathtt{A}(X) = A(X,X).$$

Ввиду того, что проблема определения спектра оператора $\mathcal{A}$ и сигнатур формы $\mathtt{A}$ левоинвариантных лоренцевых метрик на заданной группе Ли является локальной, то естественно переформулировать ее в терминах метрических алгебр Ли. Именно, определить возможный спектр оператора $\mathcal{A}$ и возможные сигнатуры формы $\mathtt{A}$ для всевозможных скалярных произведений на заданной алгебре Ли.

Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять компоненты матриц $\mathtt{A}$ и $\mathcal{A}$ как функции структурных констант c_{ij}^k и метрического тензора g_{ij} (подробнее см. [6, 9, 14]):

$$\begin{gathered}
c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks}, \quad \Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij}\right), \\
\Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks}, \\
R_{ijkt} = c_{ij}^s \Gamma_{sk,t} - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is,t} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js,t}, \\
r_{ik} = R_{ijkt} g^{jt}, s = r_{ik} g^{ik}, \\
A_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(r_{ij} - \frac{s g_{ij}}{2(n-1)}\right), \\
\mathtt{A}_{i,j} = A_{ij}, \quad \mathcal{A}_i^j = A_{ik} g^{kj}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Пусть теперь G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Определим структурные константы и удобный для вычисления базис в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой (см. [4, 9, 14, 15]).

Теорема 1. *Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой g и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, тогда в $\mathfrak{g}$ существует базис, в котором матрицы C и g имеют один из видов, приведенных в таблице 1.*

Доказательство теоремы 1 приведено в [9, 14].

Замечание. *Существуют ровно шесть неизоморфных трехмерных алгебр Ли и соответствующих им типов унимодулярных трехмерных групп Ли (см. [1]). Все они приведены в таблице 2 вместе с условиями на структурные константы, при которых алгебра Ли имеет данный тип. Если в таблице 2 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли, и столбца, соответствующему типу, стоит знак «−» значит, что для данной алгебры Ли невозможен соответствующий тип базиса.*

3. Предписанные значения оператора одномерной кривизны $\mathcal{A}$. Данный раздел посвящен доказательству нескольких теорем о пред-

Таблица 1

Структурные константы и метрический тензор в удобных для вычислений базисах трехмерных алгебр Ли

Случай	C	g	Ограничения
Алгебра Ли унимодулярна			
A1	$c_{12}^3=\lambda_3,\ c_{31}^2=\lambda_2,\ c_{32}^1=\lambda_1$	$g_{22}=g_{33}=-g_{11}=1$	
A2	$c_{13}^3=c_{21}^2=1,\ c_{12}^3=1-\lambda_2,\ c_{31}^2=1+\lambda_2,\ c_{23}^1=\lambda_1$	$g_{11}=g_{22}=-g_{33}=1$	
A3	$c_{12}^1=c_{31}^1=c_{23}^2=c_{23}^3=1,\ c_{21}^3=c_{31}^2=c_{23}^1=\lambda$	$g_{11}=g_{22}=-g_{33}=1$	
A4	$c_{12}^3=\lambda_3,\ c_{31}^1=c_{23}^2=\beta,\ c_{31}^2=c_{32}^1=\alpha$	$g_{22}=g_{33}=-g_{11}=1$	$\beta\neq 0$
Алгебра Ли неунимодулярна			
A	$c_{13}^1=\lambda\sin\varphi,\ c_{31}^2=\mu\cos\varphi,$ $c_{23}^1=\lambda\cos\varphi,\ c_{23}^2=\mu\sin\varphi$	$g_{11}=g_{22}=-g_{33}=1$	$\varphi\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ $\lambda+\mu\neq 0,$ $\lambda\geqslant 0,\ \mu\geqslant 0$
B	$c_{31}^1=t,\ c_{31}^2=s,\ c_{23}^1=p,\ c_{23}^2=q$	$g_{22}=-g_{13}=-g_{31}=1$	$q\neq t$
C1	$c_{31}^1=s,\ c_{13}^2=c_{23}^1=p,\ c_{23}^2=q$	$g_{11}=g_{33}=-g_{22}=1$	$q\neq s$
C2	$c_{13}^1=c_{23}^2=q,\ c_{31}^2=r,\ c_{23}^1=p$	$g_{11}=g_{33}=-g_{22}=1$	$q\neq 0,$ $p+r\neq 0$

Таблица 2

Трехмерные унимодулярные алгебры Ли

Алг. Ли	Ограничения на структурные константы			
	A1	A2	A3	A4
$su(2)$	$\lambda_1<0,\ \lambda_2,\lambda_3>0$	–	–	–
$sl(2,\mathbb{R})$	$\lambda_1,\lambda_2>0,\ \lambda_3<0$ или $\lambda_1,\lambda_2<0,\ \lambda_3>0$ или $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$	$\lambda_1,\lambda_2\neq 0$	$\lambda\neq 0$	$\lambda_3\neq 0$
$e(2)$	$\lambda_1<0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_3=0$ или $\lambda_1<0,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3>0$ или $\lambda_1=0,\ \lambda_2,\lambda_3>0$	–	–	–
$e(1,1)$	$\lambda_1,\lambda_2>0,\ \lambda_3=0$ или $\lambda_1,\lambda_3>0,\ \lambda_2=0$ или $\lambda_1=0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_3<0$	$\lambda_1=0,\ \lambda_2\neq 0$ или $\lambda_1\neq 0,\ \lambda_2=0$	$\lambda=0$	$\lambda_3=0$
h	$\lambda_1<0,\ \lambda_2,\lambda_3=0$ или $\lambda_1=\lambda_3=0,\ \lambda_2>0$ или $\lambda_1,\lambda_2=0,\ \lambda_3>0$	$\lambda_1,\lambda_2=0$	–	–
$\mathbb{R}^3$	$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3=0$	–	–	–

писанных значениях оператора одномерной кривизны $\mathcal{A}$.

Теорема 2. *Трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, допускающая базис типа A4, и оператором одномерной кривизны $\mathcal{A}$ существует в том и только в том случае, если либо матрица оператора $\mathcal{A}$ диагонализируема и собственные значения удовлетворяют условию $a_3=-3a_1=-3a_2<0$, либо $\mathcal{A}$ имеет комплексно сопряженные собственные значения $a_1=\overline{a_2}=x+iy$ и действительное собственное значение a_3, причем $a_3+x<0$.*

Доказательство. Из (1) следует, что матрица оператора одномерной кривизны в базисе типа A4 имеет следующие собственные значения:

$$a_1=\overline{a_2}=-\frac{1}{2}\lambda_3\alpha+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\lambda_3^2+i\beta(2\alpha-\lambda_3),$$
$$a_3=-\frac{3}{2}\beta^2-\frac{5}{8}\lambda_3^2+\frac{1}{2}\lambda_3\alpha,$$

где i — мнимая единица.

Введем обозначения:

$$x=-\frac{1}{2}\lambda_3\alpha+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\lambda_3^2,\quad y=\beta(2\alpha-\lambda_3),$$

тогда $a_1=\overline{a_2}=x+iy$. Пусть $\lambda_3=2\alpha$, тогда

$$a_3=-\frac{3}{2}\beta^2-\frac{3}{2}\alpha^2<0,\ x=\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2>0,\ y=0,$$

а значит $a_1=a_2$ — действительные числа, $a_3+3a_1=0$ и система имеет следующее решение:

$$\alpha=\pm\frac{1}{3}\sqrt{-9\beta^2-6a_3},\quad \lambda_3=\pm\frac{2}{3}\sqrt{-9\beta^2-6a_3},$$
$$\forall\beta^2\geqslant-\frac{2}{3}a_3>0.$$

Пусть $\lambda_3\neq 2\alpha$, а значит $\beta=\frac{y}{2\alpha-\lambda_3}\neq 0$ и

$$a_3+x=-\frac{y^2}{(2\alpha-\lambda_3)^2}-\frac{1}{4}\lambda_3^2<0,$$

тогда

$$\alpha=\frac{1}{2}\lambda_3\pm\frac{|y|}{\sqrt{-\lambda_3^2-4a_3-4x}},$$
$$\lambda_3=\pm 2\frac{|a_3+3x|\sqrt{-(a_3+x)}}{\sqrt{y^2+(a_3+3x)^2}}.$$

Нетрудно проверить, что условие $\lambda_3^2 + 4a_3 + 4x < 0$ выполняется при данном λ_3.

Теорема 3. *Трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, допускающая базис типа B, и оператором одномерной кривизны $\mathcal{A}$ существует в том и только в том случае, если $\mathcal{A}$ имеет два действительных собственных значения a_1 кратности 1 и a_2 кратности 2, причем каждому соответствует одномерное собственное подпространство и выполняется $a_2 = -\frac{5}{3}a_1 \geqslant 0$.*

Доказательство. Из (1) следует, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в случае B имеет следующую жорданову форму:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8}s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8}s^2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8}s^2 \end{pmatrix},$$

а значит, ее собственные значения равны

$$a_1 = -\frac{5}{8}s^2 \leqslant 0, \quad a_2 = \frac{3}{8}s^2 \geqslant 0.$$

Остальные случаи рассматриваются подобным образом.

4. Сигнатуры формы одномерной кривизны $\mathtt{A}$. Изучение свойств тензора одномерной кривизны представляет интерес в понимании геометрического и топологического строения однородного (псевдо)риманова многообразия. Поэтому естественно пытаться отыскать общие свойства тензора одномерной кривизны. Один из вариантов — исследовать сигнатуры соответствующей формы одномерной кривизны однородного (псевдо)риманова многообразия.

Под сигнатурой квадратичной формы $\mathcal{B}$, действующей на n-мерном евклидовом пространстве, будем понимать упорядоченный набор $(\operatorname{sgn}(\tau_1), \operatorname{sgn}(\tau_2), \ldots, \operatorname{sgn}(\tau_n))$, где $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n$ — собственные значения матрицы формы $\mathcal{B}$, и $\operatorname{sgn}(x)$ означает знак (вещественного) числа x.

Для упрощения изложения занумеруем все возможные сигнатуры для трехмерного случая так, как это указано в таблице 3.

Таблица 3

Возможные сигнатуры формы одномерной кривизны на трехмерных группах Ли

№	Сигнатура	№	Сигнатура
1	$(-,-,-)$	6	$(-,+,+)$
2	$(-,-,0)$	7	$(0,0,0)$
3	$(-,-,+)$	8	$(0,0,+)$
4	$(-,0,0)$	9	$(0,+,+)$
5	$(-,0,+)$	10	$(+,+,+)$

Теорема 4. *Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, $\mathfrak{g}$ — метрическая алгебра Ли группы G, s — произвольная сигнатура из таблицы 3. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры формы $\mathtt{A}$ для некоторого лоренцева скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только в том случае, если в таблице 4 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак «+».*

Таблица 4

Возможные сигнатуры формы $\mathtt{A}$ левоинвариантных лоренцевых метрик на трехмерных группах Ли

		№ сигнатуры									
Алгебра Ли		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Алгебра Ли унимодулярна											
A1	$su(2)$	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+
	$sl(2,\mathbb{R})$	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+
	$e(2)$	−	−	+	−	+	+	+	−	+	+
	$e(1,1)$	+	+	+	−	−	−	+	−	−	+
	h	−	−	+	−	−	−	−	−	−	+
	$\mathbb{R}^3$	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−
A2	$sl(2,\mathbb{R})$	−	+	+	−	+	+	−	−	−	−
	$e(1,1)$	−	−	+	+	−	−	−	+	−	−
	h	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−
A3	$sl(2,\mathbb{R})$	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−
	$e(1,1)$	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−
A4	$sl(2,\mathbb{R})$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−
	$e(1,1)$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−
Алгебра Ли неунимодулярна											
A		+	+	+	−	+	+	−	−	−	−
B		−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
C1		+	+	+	−	+	+	−	−	−	−
C2		+	+	+	+	+	+	−	+	+	+

Приведем доказательство теоремы 4 для случаев A2 и C1, остальные случаи рассматриваются аналогично.

Главные значения формы $\mathtt{A}$ в базисе типа A2 из таблицы 1 теоремы 1 имеют вид

$$a_1 = -\frac{5}{8}\lambda_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2,$$

$$a_{2,3} = \lambda_1 - 2\lambda_2 \pm \pm \frac{1}{8}\sqrt{\lambda_1^2(3\lambda_1 - 4\lambda_2)^2 + 64(\lambda_1 - 2\lambda_2)^2}.$$

Таким образом, определение сигнатуры формы $\mathtt{A}$ трехмерной унимодулярной алгебры Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой сводится к нахождению всевозможных знаков главных значений a_1, a_2, a_3 в зависимости от знаков структурных констант λ_1, λ_2.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то есть алгебра Ли есть алгебра h, тогда форма $\mathtt{A}$ тривиальна. Значит,

Таблица 5

Наборы структурных констант алгебры Ли $sl(2,\mathbb{R})$ в случае А2 и соответствующие им сигнатуры формы A

№	сигнатура	λ_1	λ_2
2	$(-,-,0)$	1	$\frac{3}{4}$
3	$(-,-,+)$	1	1
5	$(-,0,+)$	1	$\frac{5}{4}$
6	$(-,+,+)$	1	2

Таблица 6

Наборы структурных констант алгебры Ли С2 и соответствующие им сигнатуры формы A

№	сигнатура	r	p	q
1	$(-,-,-)$	0	0	1
2	$(-,-,0)$	0	1	$\frac{1}{2}$
3	$(-,-,+)$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	$(-,0,0)$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
5	$(-,0,+)$	-3	1	$-\sqrt{3}$
6	$(-,+,+)$	-2	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
8	$(0,0,+)$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
9	$(0,+,+)$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{11\sqrt{3}}{20}-1$
10	$(+,+,+)$	-1	2	1

единственно возможной сигнатурой является сигнатура 7.

Пусть алгебра Ли есть алгебра $e(1,1)$, то есть либо $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq 0$, и главные значения формы A имеют вид

$$a_1=0,\quad a_{2,3}=-2\lambda_2\pm 2|\lambda_2|;$$

либо $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2=0$, и главные значения формы A имеют вид

$$a_1=-\frac{5}{8}\lambda_1^2,\quad a_{2,3}=\lambda_1\pm\frac{1}{8}|\lambda_1|\sqrt{9\lambda_1^2+64}.$$

Отсюда явным образом следует, что в случае алгебры Ли $e(1,1)$ реализуются только сигнатуры 3, 4, 8.

Пусть $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$, то есть алгебра Ли есть алгебра $sl(2,\mathbb{R})$. В таблице 5 приведены значения параметров λ_1, λ_2, при которых реализуются возможные сигнатуры формы A. Докажем, что остальные сигнатуры не реализуются.

Пусть $\lambda_1=\frac{4}{3}\lambda_2$, тогда главные значения формы A имеют вид

$$a_1=-\frac{4}{9}\lambda_2^2,\quad a_{2,3}=-\frac{2}{3}\lambda_2\pm\frac{2}{3}|\lambda_2|,$$

а значит, в этом случае реализуются только сигнатуры 2, 5.

Пусть далее $\lambda_1\neq\frac{4}{3}\lambda_2$. Тогда

$$a_2a_3=-\frac{1}{64}\lambda_1^2(3\lambda_1-4\lambda_2)^2<0,$$

а значит, сигнатуры 1, 4, 7–10 не реализуются.

Главные значения формы A в базисе типа С2 из таблицы 1 теоремы 1 имеют вид

$$a_1=\frac{3}{8}(p+r)^2-\frac{1}{2}q^2,\quad a_{2,3}=\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{2}p^2\pm\frac{1}{8}\sqrt{H},$$

где $H=p^4+4p^3r+72p^2q^2+6p^2r^2+144pq^2r+4pr^3+$ $+16q^4+72q^2r^2+r^4$.

В таблице 6 приведены значения параметров r, p, q, при которых реализуются возможные сигнатуры формы A. Докажем, что оставшаяся сигнатура 7 не реализуется.

Пусть реализуется сигнатура 7. Тогда $a_1=$ $=a_2=a_3=0$, а значит $0=a_2+a_3=r^2-p^2$, что, с учетом $p+r\neq 0$ дает $p=r$. Тогда

$$0=a_2=\frac{1}{2}\sqrt{p^4+18p^2q^2+q^4},$$

что невозможно, так как $q\neq 0$. Следовательно, сигнатура 7 не реализуется.

Заключение. В результате проведенных исследований были даны ответы на часть нерешенных проблем теории операторов кривизны на метрических группах Ли малой размерности:

1. Найдены необходимые и достаточные условия существования трехмерной метрической группы Ли с предписанными значениями спектра оператора одномерной кривизны.

2. Доказана классификационная теорема о сигнатурах спектра формы одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой.

Библиографический список

1. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — V. 21.

2. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Матем. труды. — 2008. — Т. 11 (2).

3. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Матем. труды. — 2009. — Т. 12 (1).

4. Calvaruso G., Kowalski O. On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds // Cent. Eur. J. Math. — 2009. — V. 7 (1).

5. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedicata. — 1996. — № 1.

6. Воронов Д.С., Гладунова О.П. Сигнатура оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2010. — № 1/2.

7. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Левоинвариантные лоренцевы метрики на 3-мерных группах Ли с нулевым квадратом длины тензора Схоутена-Вейля // Вестник АлтГПУ. — 2004. — № 4–3.

8. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. — 2006. — Т. 37.

9. Пастухова С.В., Хромова О.П. О сигнатуре оператора тензора кривизны Риччи трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Известия Алтйского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2.

10. Пастухова С.В., Хромова О.П. О предписанных значениях спектров операторов тензоров Риччи и одномерной кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками // Дни геометрии в Новосибирске — 2015 : тезисы Междунар. конф. — Новосибирск, 2015.

11. Calvaruso G. Pseudo-Riemannian 3-manifolds with prescribed distinct constant Ricci eigenvalues // Diff. Geom. Appl. — 2008. — V. 26.

12. Kowalski O. Nonhomogeneous Riemannian 3-manifolds with distinct constant Ricci eigenvalues // Nagoya Math. J. — 1993. — V. 132.

13. Бессе А. Многообразия Эйнштейна : в 2 т. / пер. с англ. — М., 1990.

14. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Матем. труды. — 2006. — Т. 9 (1).

15. Calvaruso G. Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. — 2007. — V. 57.