УДК 531.72

Механическая система с локальной калибровочной симметрией*

А.И. Гончаров

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

A Mechanical System with a Local Gauge Symmetry

A.I. Goncharov

Altai State University (Barnaul, Russia)

Статья посвящена методической проблеме придания наглядности одному из абстрактных видов симметрии — симметрии относительно локального калибровочного преобразования. Рассматривается бесконечная однородная струна, расположенная в трехмерном пространстве. Пусть сначала струна совершает свободные колебания, описываемые функцией $u(x,t) = \cos kx \exp\left[-ikct - iF(x,t)\right]$. С точки зрения внешних наблюдателей, каждая точка струны вращается в плоскости YZ. Добавочная фаза F обусловлена изменением направлений осей Y и Z в пространстве и во времени. На основе стоячей волны $u(x,t)$ с помощью непрерывно выполняемых активных преобразований Пуанкаре (не затрагивающих, однако, функцию F) получена функция $U(x,t) = \Psi(x,t)\cos\Phi(x,t)$, где $\Psi = \exp\left(iS(x,t)\right)$, описывающая вынужденные колебания специального вида. Фазу $\Phi(x,t) = 0$ называем «частицей». Показано, что S является действием этой частицы. На основе S определяются полная энергия частицы и ее обобщенный импульс, в состав которых входят потенциальные функции $V(x,t)$, $A(x,t)$. Функция Ψ обращает в тождество уравнение Шредингера с нелокальным гамильтонианом, содержащим функции V, A. Тождество остается в силе при замене F на $F - f(x,t)$, которая эквивалентна локальному калибровочному преобразованию в виде одновременной замены Ψ на $\exp\left(if(x,t)\right)\Psi$, V на $V - \partial_t f(x,t)$ и A на $A + \partial_x f(x,t)$. Таким образом, рассматриваемая модель обладает локальной калибровочной симметрией.

Ключевые слова: стоячие волны, активное преобразование Пуанкаре, уравнение Шредингера, нелокальный гамильтониан, локальная калибровочная симметрия.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-15

Our methodological aim is to make easy-to-interpret one of the abstract symmetries — symmetry with respect to local gauge transformations. An infinite homogeneous string in three-dimensional space is considered. We first assume that free oscillations of the string are described by the function $u(x,t) = \cos kx \exp\left[-ikct - iF(x,t)\right]$. From the external observers viewpoint each point of the string rotates in the YZ plane with an additional phase F due to direction changes of axes Y and Z in space and time. Continuously performing active Poincaré transformations on the standing wave $u(x,t)$ and not affecting the function F we obtain the function for the forced oscillations of a special kind $U(x,t) = \Psi(x,t)\cos\Phi(x,t)$, where $\Psi = \exp\left(iS(x,t)\right)$. The phase $\Phi(x,t) = 0$ is called “particle”. It is shown that S is the action of this particle. The particle total energy and generalized momentum that include the potential functions V, A are derived from S. Ψ reduces to an identity the Schrödinger equation with nonlocal Hamiltonian that contains the functions V, A. The identity remains valid when replacing the F with $F - f(x,t)$. This replacement is equivalent to a local gauge transformation in the form of simultaneous replacement of Ψ with $\exp\left(if(x,t)\right)\Psi$, of V with $V - \partial_t f(x,t)$ and of A with $A + \partial_x f(x,t)$. Thus, the investigated model has local gauge symmetry.

Key words: standing waves, active Poincaré transformation, Schrödinger equation, nonlocal Hamiltonian, local gauge symmetry.

Введение. К числу актуальных методических проблем относится разработка простых моделей, иллюстрирующих отдельные физические

*Работа выполнена при частичной поддержке Программы стратегического развития Алтайского госуниверситета (НОК-2, подпроект 2.1.2.1).

закономерности нашего мира, сложные для интуитивного восприятия. Ряд наших работ посвящен модели, в которой пространством является бесконечная однородная струна. Материя и физические процессы в этом одномерном пространстве обусловлены колебаниями струны. Мы ограничиваемся рассмотрением вынужденных линейных колебаний, оставив в стороне вопрос о естественном механизме формирования волн нужного типа. В связи с этим полагаем, что струна находится во внешнем вспомогательном пространстве, которое для определенности считаем трехмерным. На этом пути удается придать наглядность принципу относительности и релятивистской кинематике ([1–3]; см. также работу Шенахана [4]) и получить тождества, по структуре совпадающие с уравнениями динамики материальной точки в двумерном пространстве-времени [5]. Данная работа посвящена обобщению математической модели, описанной в [5]. Это обобщение позволяет проиллюстрировать природу известной из квантовой механики [6] локальной калибровочной симметрии. Для связности повторяем некоторые рассуждения из [1–3, 5].

Укажем логические связи данной статьи с работами других авторов. В ряде исследований развивалось представление о волне де Бройля как стоячей волне внутри частицы, например [7, 8]. В методической статье [9] приведено краткое описание мысленного эксперимента, иллюстрирующего это представление. При этом релятивистские закономерности, например, $v < c$, не нашли объяснения. Между тем связь релятивистских явлений с волновыми процессами изначально содержится в теории де Бройля. Предлагаемая нами модель основана на эвристической гипотезе, согласно которой наше пространство материально, а та сущность, которую мы воспринимаем как материю, обусловлена процессами в этом пространстве. Представление о материальности пространства имеет давнюю историю [10] и оно логически проще, чем представление о пространстве как вместилище, частично заполненном материей. Согласно обсуждаемой гипотезе, в доступной нам реальности «все состоит из волн» (например, [11]), которые обусловлены колебаниями пространства. Материя же, составляющая пространство, относится к другому уровню реальности, или, в терминах Д. Бома, к скрытому порядку [12]. «Пустое» пространство, внешнее по отношению к материальному пространству, а также внешних наблюдателей, к которым мы апеллируем, рассматриваем лишь как формальный прием, позволяющий описывать процессы в терминах внешней геометрии. В солитонных моделях роль материального пространства выполняют поля, заполняющие внешнее пространство [13], а в некоторых вариантах теории суперструн эту роль выполняют браны. Для нашей задачи наибольший интерес представляет разновидность теории бран, описанная в [14], в которой пространство-брана представляет собой сеть, построенную из струн. Как частный случай, одномерное пространство состоит из отдельной струны. Возбуждения струн трактуются как частицы. В отличие от [14], мы рассматриваем возбуждения в виде движущихся стоячих волн типа (8). Тот факт, что функция типа $\Psi = e^{-ik\gamma(ct-\beta x)}$, мультипликативно входящая в состав (8), может быть отождествлена с волной де Бройля, был отмечен в работах [1, 4, 7, 15]. В [15] предложен возможный механизм возникновения волн типа (8).

1. Предварительное рассмотрение. Переменное направление отсчета. В рассматриваемой модели все процессы протекают на одной и той же струне. Считаем, что колебания струны подчиняются волновому уравнению

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \text{ или } \partial_k \partial^k u(x,t) = 0 \qquad (1)$$

($\partial_0 = \partial^0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$; $\partial_1 = -\partial^1 = \frac{\partial}{\partial x}$; действует соглашение о суммировании). Нас будут интересовать волны с круговой поляризацией. Рассмотрим вращающуюся (с точки зрения внешних наблюдателей) стоячую волну

$$u(x,t) = \cos kx e^{-ikct}. \qquad (2)$$

Внутренние наблюдатели, состоящие из волн («волновые наблюдатели»), воспринимают процесс, описываемый функцией e^{-ikct}, не как движение в пространстве, а как некоторую принципиально скрытую от них форму движения, характеризуемую энергией покоя kc. Они приписывают это движение не самой струне, которую они также не воспринимают, а волновым образованиям. В первую очередь в связи с этим мы и записываем вращение струны не в векторной, а в комплексной форме.

Роль волнового образования может выполнять одна из фаз функции $\cos\varphi^{(1)} = \cos kx$, например, $\varphi^{(1)} = 0$; будем называть ее «наблюдателем $\varphi^{(1)} = 0$», «частицей». Выделенность этой фазы обусловлена тем способом, с помощью которого в дальнейшем она будет приведена в движение. Существуют и другие способы создания выделенных фаз ([5], пункт 4).

Пусть внешнее пространство изотропно в направлениях, перпендикулярных струне. В этом случае волновые наблюдатели не могут обнаружить дополнительного поворота струны как целого в плоскости YZ и, таким образом, умножение всех волн на $e^{i\alpha}$ не приводит к каким-либо наблюдаемым эффектам (глобальная калибровочная симметрия).

Внешние наблюдатели воспринимают $\varphi^{(2)} = kct$ как угол поворота струны, отсчитываемый от некоторого направления («направление отсчета»). Формулы (1), (2) записаны в предположении, что направление отсчета не изменяется со временем и одинаково для всех точек струны (в том смысле, в котором вводятся параллельные векторы в евклидовом пространстве). Например, это может быть $\vec{j}$ — положительное направление оси Y.

Введем теперь переменное направление отсчета, зависящее от координаты и от времени. Пусть угол между постоянным направлением $\vec{j}$ и направлением отсчета изменяется по закону $F(x,t)$. Тогда $F(x,t)$ появится и в составе $\varphi^{(2)}$:

$$u_{\mathtt{F}}(x,t) = \cos kxe^{-ikct-iF(x,t)}. \qquad (3)$$

Добавочную фазу $-F$ можно интерпретировать и как результат изменения направлений осей Y, Z во внешнем пространстве в зависимости от x и t; в этом случае направление отсчета совпадает с $\vec{j}$. Функция (3) удовлетворяет волновому уравнению

$$D_k D^k u_{\mathtt{F}}(x,t) = 0, \qquad (4)$$

где

$$D_k = \partial_k + i(\partial_k F(x,t)) \qquad (5)$$

— ковариантная производная.

Отметим, что преобразование, описываемое переходом от $u(x,t)$ к $u_{\mathtt{F}}(x,t)$, мы в этой статье рассматриваем как пассивное, в отличие от вышеупомянутого реального (с точки зрения внешних наблюдателей) глобального поворота. Тем не менее $F(x,t)$ следует рассматривать как конкретную функцию — такую, при которой данный выбор направления отсчета по какой-то причине оказывается естественным.

Пусть $F(x,t)$ — лоренцев скаляр в 2-мерном пространстве-времени. Компоненты $\partial_k F(x,t)$, $k = 0,1$ образуют 2-мерный вектор $\mathcal{A}_k = \partial_k F$. Функция (3) является решением уравнения (4) при любой функции $F(x,t)$. Поэтому преобразованная функция $u'_{\mathtt{F}}(x,t) = \cos kx\, e^{-i[kct+F'(x,t)]}$ является решением преобразованного уравнения $D'_k D'^k u'_{\mathtt{F}} = 0$, где, например, $F'(x,t) = F(x,t) - f(x,t)$, $D'_k = \partial_k + i\mathcal{A}'_k$, $\mathcal{A}'_k = \partial_k F' = \mathcal{A}_k - \partial_k f$. Таким образом, модель, описываемая формулами (3)–(5), симметрична относительно локального преобразования

$$u'_{\mathtt{F}} = e^{if(x,t)} u_{\mathtt{F}}, \quad \mathcal{A}'_k = \mathcal{A}_k - (\partial_k f(x,t)).$$

В отличие от заданной функции $F(x,t)$ функцию $f(x,t)$ следует считать *произвольным* скаляром.

2. Разделение частот. Очевидно, что всегда можно подобрать такую внешнюю силу, под действием которой струна будет совершать колебания по любому заранее заданному закону. При таком воздействии, которое можно охарактеризовать как «жесткое», струна перестает играть роль упругой среды. Мы используем только силы специального вида (которые здесь явно не выписываем), при которых, напротив, главная роль в общей картине отводится собственным колебаниям струны.

Сначала рассмотрим однократное воздействие. Пусть свободное колебание струны описывается функцией $u(x,t) = A(a+x-ct)+B(b+x+ct)$, где $A(x)$, $B(x)$ — функции, a, b — константы. Результат воздействия заключается в следующем. В момент t_0 создается волна $U_0(x,t) = A(a+x_0-ct_0+[x-x_0-c(t-t_0)]\delta_0) + B(b+x_0+ct_0+[x-x_0+c(t-t_0)]/\delta_0)$. Сразу после этого волна $u(x,t)$ гасится. В [1–3,5] эта процедура названа разделением частот в момент t_0 относительно точки x_0, или, кратко, разделением частот относительно точки (x_0,t_0); $\delta_0 > 0$ — параметр разделения. (x_0,t_0) является неподвижной точкой этого активного преобразования.

Запишем $U_0(x,t)$ в виде $U_0(x,t) = A[a_0 + (x-ct)\delta_0] + B[b_0 + (x+ct)/\delta_0]$, $t \geqslant t_0$, где $a_0 = a + x_0 - ct_0 - (x_0 - ct_0)\delta_0$, $b_0 = b + x_0 + ct_0 - (x_0+ct_0)/\delta_0$. Пусть в момент $t_1 \geqslant t_0$ произведено еще одно воздействие, которое привело к разделению частот относительно (x_1,t_1), причем полный параметр разделения стал равен δ_1: $U_1(x,t) = A\{a_0 + (x_1-ct_1)\delta_0 + [x-x_1-c(t-t_1)]\delta_1\} + B\{b_0 + (x_1+ct_1)/\delta_0 + [x-x_1+c(t-t_1)]/\delta_1\} = A[a_1+(x-ct)\delta_1] + B[b_1 + (x+ct)/\delta_1]$, где $a_1 = a_0 + (x_1-ct_1)\delta_0 - (x_1-ct_1)\delta_1$, $b_1 = b_0 + (x_1+ct_1)/\delta_0 - (x_1+ct_1)/\delta_1$. В результате последовательных ($t_0 \leqslant t_1 ... \leqslant t_n$) разделений частот относительно точек (x_0,t_0), (x_1,t_1), ... (x_n,t_n) с полным параметром соответственно δ_0, δ_1, ... δ_n получим волну при $t \geqslant t_n$:

$$U_n(x,t) = A[a_n + (x-ct)\delta_n] + B[b_n + (x+ct)/\delta_n], \qquad (6)$$

где $a_n = a_{n-1} + (x_n - ct_n)\delta_{n-1} - (x_n - ct_n)\delta_n = a + x_0 - ct_0 - (x_n - ct_n)\delta_n + \sum\limits_{l=1}^{n}[x_l - x_{l-1} - c(t_l - t_{l-1})]\delta_{l-1}$, $b_n = b_{n-1} + (x_n + ct_n)/\delta_{n-1} - (x_n + ct_n)/\delta_n = b + x_0 + ct_0 - (x_n+ct_n)/\delta_n + \sum\limits_{l=1}^{n}[x_l - x_{l-1} + c(t_l - t_{l-1})]/\delta_{l-1}$, $n \geqslant 1$.

3. Приведение частицы в движение. Перепишем (2) в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2}e^{ik(x-ct)} + \frac{1}{2}e^{-ik(x+ct)}. \qquad (7)$$

Разделение частот в (7) относительно (x_0,t_0) приводит к замене в момент t_0 функции $u(x,t)$ на

$$U(x,t) = \cos k\{x_0 + \gamma[x - x_0 - \beta c(t-t_0)]\} \times e^{-ik\{ct_0 + \gamma[c(t-t_0) - \beta(x-x_0)]\}} = \cos\Phi^{(1)} e^{-i\Phi^{(2)}}, \qquad (8)$$

где $\beta = (\delta^2-1)/(\delta^2+1)$, $\gamma = (\delta^2+1)/2\delta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Из формул (2), (8) следует, что в случае гармонических волн разделение частот эквивалентно применению к волне (2) активного преобразования Пуанкаре с неподвижной точкой

(x_0, t_0). При этом преобразовании $\Phi^{(i)}(x_0, t_0) = \varphi^{(i)}(x_0, t_0)$, $i = 1, 2$. При разделении частот не изменяется x-координата фазы $\Phi^{(1)} = kx_0$. Это позволяет связать с фазой $\Phi^{(1)} = kx_0$ понятия «непрерывный наблюдатель» [2] и «частица» [5]. Из (8) следует, что частица движется со скоростью $v = \beta c < c$.

Применив к (7) многократное разделение частот (6), сложив экспоненты и приняв $x_0 = 0$, $t_0 = 0$, получим волну $U_n(x,t) = \cos\Phi_n^{(1)}\, e^{-i\Phi_n^{(2)}}$, где $\Phi_n^{(1)}(x,t) = k\sum\limits_{l=1}^{n}\gamma_{l-1}[x_l - x_{l-1} - \beta_{l-1}c(t_l - t_{l-1})] + k\gamma_n[x - x_n - \beta_n c(t - t_n)]$, $\Phi_n^{(2)}(x,t) = k\sum\limits_{l=1}^{n}\gamma_{l-1}[c(t_l - t_{l-1}) - \beta_{l-1}(x_l - x_{l-1})] + k\gamma_n[c(t - t_n) - \beta_n(x - x_n)]$. Зададим координаты точек x_l. Пусть на каждом этапе разделение осуществляется относительно той точки, в которой находится фаза $\Phi^{(1)} = kx_0 = 0$, т.е. частица. Из уравнений $\Phi_n^{(1)}(x = x_n, t = t_n) = 0\,\forall n \geqslant 1$ находим, что

$$x_l - x_{l-1} = \beta_{l-1}c(t_l - t_{l-1}),\ l \geqslant 1. \tag{9}$$

Тогда $\Phi_n^{(1)}(x,t) = k\gamma_n[x - x_n - \beta_n c(t - t_n)]$, $\Phi_n^{(2)}(x,t) = k\sum\limits_{l=1}^{n}\sqrt{1-\beta_{l-1}^2}\,c(t_l - t_{l-1}) + k\gamma_n[c(t - t_n) - \beta_n(x - x_n)]$, $t \geqslant t_n$. Отметим, что $\Phi_n^{(2)}(x,t)$ можно записать в ковариантном виде, так как $\sum\limits_{l=1}^{n}\sqrt{1-\beta_{l-1}^2}(t_l - t_{l-1})$ — промежуток собственного времени, измеренный по одним и тем же движущимся часам в точке $\Phi^{(1)} = 0$, а $\gamma_n[c(t - t_n) - \beta_n(x - x_n)]$ — скалярное произведение двумерных векторов $(c(t - t_n), x - x_n)$ и $(\gamma_n, \beta_n\gamma_n)$. Однако условие $t \geqslant t_n$ остается нековариантным.

Из (9) следует $x_n = \sum\limits_{l=1}^{n}\beta_{l-1}c(t_l - t_{l-1})$. Полагаем $t = t_n$ и переходим к пределу $\Delta t_l \to 0\,\forall l$. Обозначим также $k = mc$, $\beta c = v$, $mv\gamma = p$. Наконец, отметим, что разделение частот производится при неизменном («лабораторном») направлении отсчета, т.е. функция $F(x,t)$ в этой процедуре не участвует. После перехода к переменному направлению отсчета в составе фазы $\Phi^{(2)}$ появится слагаемое $F(x,t)$. Итак,

$$U_{\mathrm{F}}(x,t) = \cos\Phi^{(1)}e^{iS}, \tag{10}$$

где $\Phi^{(1)}(x,t) = mc\gamma(t)[x - \int\limits_0^t v(\tau)d\tau]$,

$$S(x,t) = -\Phi^{(2)} = -mc^2\int\limits_0^t\sqrt{1-\beta^2(\tau)}d\tau - p(t)[\int\limits_0^t v(\tau)d\tau - x] - F(x,t). \tag{11}$$

4. Действие. Вычислим $\partial_t S = \frac{\partial}{\partial t}S$ при $x = const$ и $\partial_x S = \frac{\partial}{\partial x}S$ при $t = const$:

$$\begin{aligned}\partial_t S &= -\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} - V(x,t),\\ \partial_x S &= p + A(x,t),\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}V(x,t) &= \dot p(t)[\int\limits_0^t v(\tau)d\tau - x] + \partial_t F(x,t),\\ A(x,t) &= -\tfrac{\partial F(x,t)}{\partial x}.\end{aligned} \tag{13}$$

Из (12)–(13) следует равенство

$$\dot p = -\partial_x V - \partial_t A, \tag{14}$$

которое по форме совпадает с одномерным уравнением движения частицы в электрическом поле [16] (если обозначить $V = e\varphi$, $A = e\mathcal{A}/c$, где $\mathcal{A}$ — векторный потенциал). В рассматриваемой модели (14) является тождеством. Тем не менее из (12)–(14) следует, что S — это действие частицы, а $P = \partial_x S = p + A$ — обобщенный импульс.

Как и любая функция, $S(x,t)$ удовлетворяет бесконечному числу уравнений. Например, $Q = S + F$ является решением уравнения

$$-\partial_t Q = \sqrt{c^2(\partial_x Q)^2 + m^2c^4} + (\partial_x\partial_t Q)[\frac{1}{m}\int\limits_0^t\frac{\partial_x Q(x,\tau)}{\sqrt{1 + (\partial_x Q/mc)^2}}d\tau - x],$$

которое может представлять самостоятельный интерес. Однако для рассматриваемой задачи существенно то, что S является решением уравнения Гамильтона — Якоби, которое получается при подстановке в (12) только $p = \partial_x S - A$ ($v(t)$ и $\dot p(t)$ остаются в неизменном виде как известные функции времени):

$$-\partial_t S = \sqrt{c^2(\partial_x S - A)^2 + m^2c^4} + V(x,t). \tag{15}$$

Итак, формальное введение слагаемого F в состав фазы функции Ψ делает математическую модель, изложенную в [5], более симметричной.

5. Уравнение Шредингера и локальная калибровочная симметрия. Входящая в (10) функция

$$\Psi = e^{iS} \tag{16}$$

является решением уравнения Шредингера

$$i\partial_t\Psi = \sqrt{c^2(i\partial_x + A)^2 + m^2c^4}\,\Psi + V\Psi. \tag{17}$$

Корень в (17) условно обозначает ряд по степеням оператора $i\partial_x + A$ (см. [5]). Благодаря связи (13) потенциальных функций V, A с F, замена F на $F' = F - f(x,t)$ *автоматически* ведет к замене V

на $V' = V - \partial_t f$, A на $A' = A + (\partial_x f)$. Так как Ψ является решением (17) при любой функции $F(x,t)$, то преобразованная волновая функция

$$\Psi' = e^{-i\{mc^2\int\limits_0^t \sqrt{1-\beta^2(\tau)}d\tau + p(t)[\int\limits_0^t v(\tau)d\tau - x] + F'(x,t)\}} =$$

$$= e^{if(x,t)}\Psi$$

обращает в тождество преобразованное уравнение Шредингера:

$$i\partial_t\Psi' \equiv \sqrt{c^2(i\partial_x + A')^2 + m^2c^4}\Psi' + V'\Psi'.$$

В частности, можно вернуться к калибровке, которая с точки зрения внешних наблюдателей соответствует постоянному направлению отсчета: $f(x,t) = F(x,t)$, $F'(x,t) \equiv 0$, $A'(x,t) \equiv 0$, $V'(x,t) = \dot{p}(t)[\int\limits_0^t v(\tau)d\tau - x]$.

Таким образом, локальная калибровочная симметрия модели, описываемой формулами (11), (13), (16), (17), проявляется особенно прозрачно. Симметрия обусловлена тем, что фаза волновой функции содержит слагаемое F, производные которого аддитивно входят в состав потенциальных функций V, A. Функция F, которая для волновых наблюдателей является абстрактной величиной, во внешнем пространстве имеет простой геометрический смысл; это относится и к функции Ψ.

6. Дополнительные замечания.

1. Укажем два способа менее формального введения переменного направления отсчета.

а) Реальность, доступная волновым наблюдателям, связана только с волнами на струне. Поэтому используемые ими системы отсчета и направления отсчета тоже должны быть построены на основе волн. В [1, 2] лабораторная система была связана со стоячей волной

$$u_{\text{лин}} = \cos kx \cos kct. \tag{18}$$

Функция $\cos kx$ описывает тело отсчета и отвечает за линейки, а колебания, описываемые функцией $\cos kct$, используются для измерения времени. Подразумевается, что на струне одновременно существует множество волн типа (2), (18) и (8) с разными β. Наблюдатели различают эти волны и могут рассматривать их по отдельности. Линейно-поляризованная волна (18) может быть использована и для задания постоянного направления отсчета, соответствующего $F(x,t) \equiv 0$.

Пусть теперь система отсчета по-прежнему основана на волне (18) (или, что в данном случае одно и то же, на волне (2)), а для задания направления отсчета используется поляризованная по кругу движущаяся стоячая волна

$$U_\alpha(x,t) = \tfrac{1}{2}e^{-ik(x-ct)\alpha} + \tfrac{1}{2}e^{ik(x+ct)/\alpha} =$$

$$= \cos k\Gamma(x - Bct)e^{ik\Gamma(ct-Bx)},$$

где $\alpha > 0$, $B = (\alpha^2 - 1)/(\alpha^2 + 1)$, $\Gamma = 1/\sqrt{1 - B^2}$. Такому выбору направлений отсчета соответствует функция $F(x,t) = k\Gamma(ct - Bx)$.

Совокупность системы отсчета и направлений отсчета можно назвать обобщенной системой отсчета, имея, однако, в виду, что процесс, описываемый функцией $e^{iS(x,t)}$, с точки зрения волновых наблюдателей не связан с движением в пространстве.

б) Функция $F(x,t)$ приобретает механический смысл также при следующем усложнении струны. Струна состоит из звеньев цилиндрической формы, каждое из которых может вращаться вокруг своей оси, подобно бусинкам на нити. С каждым звеном можно связать локальный репер $\{\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(3)}\}$, который вращается вместе со звеном. Пусть $\vec{e}_j^{(1)}$ направлен вдоль оси j-го цилиндра, т.е. вдоль струны. Если направление $\vec{u}_j$ отклонения звена от равновесия отсчитывать от направлений $\vec{e}_j^{(2)}$ или $\vec{e}_j^{(3)}$, то появится фактор, связанный с вращением локальных реперов. При использовании комплексных функций $u_j(t)$ вместо векторных $\vec{u}_j(t)$ и в пределе $u_j(t) \to$ $\to u(x,t)$ в состав $u(x,t)$ войдет множитель типа $e^{iq(x,t)}$. О применении подвижных (движущихся вместе со струной) базисов в теории струн см., например, [17].

Представляет также интерес динамика струны при ненулевом моменте инерции каждого звена конечной длины относительно его оси, или в непрерывном пределе — при ненулевой линейной плотности момента инерции струны. При этом возможны варианты как без возникновения, так и с возникновением упругих сил при относительном повороте соседних цилиндров; в последнем случае струна будет совершать также крутильные колебания.

2. Отметим некоторые возможные направления дальнейшего развития одномерной модели.

а) Усложненная модель вместо тождества (14) должна включать содержательное уравнение.

б) Непрерывное разделение частот проводилось одновременно на всей струне в лабораторной системе отсчета. Это позволило получить простую математическую модель, которая, однако, не является релятивистски-ковариантной. В связи с этим целесообразно провести все рассуждения в неинерциальной системе, составленной из систем покоя частицы.

в) В этой модели отсутствуют квантово-механические неопределенности. Один из подходов к введению квантовых ансамблей и альтернатив, который мы предполагаем применить в дальнейшем, основан на‘неоднозначности объединения встречных волн в пары, когда по крайней мере в одном из направлений число бегущих волн больше единицы. Поясним разные типы неоднозначностей формирования «частиц» на следующем примере. Рассмотрим волну $U(x,t) = K_1 + K_2 + R_1 + R_2$, где $K_j = e^{ik_j(x-ct)}$, $R_j = e^{-ir_j(x+ct)}$. Скорость волны $K_j + R_l = \cos\left(\frac{k_j+r_l}{2}x - \frac{k_j-r_l}{2}ct\right) \cdot e^{-i\left(\frac{k_j+r_l}{2}ct - \frac{k_j-r_l}{2}x\right)}$, а тогда и скорость «частицы», равна $v_{jl} = c(k_j - r_l)/(k_j + r_l)$. В данном примере встречные волны можно объединить в пары двумя способами: $K_1 + R_1$, $K_2 + R_2$ либо $K_1 + R_2$, $K_2 + R_1$. Волна U содержит «строительный материал» для частиц со скоростями v_{11}, v_{22}, v_{12}, v_{21}. В этом смысле можно говорить о потенциальном существовании таких частиц. Но, в зависимости от способа объединения встречных волн в пары, наблюдаются либо «частицы» со скоростями v_{11} и v_{22}, либо со скоростями v_{12} и v_{21}. Теперь допустим к рассмотрению волны половинной амплитуды $\bar{K}_j = K_j/2$, $\bar{R}_j = R_j/2$ и запишем U в виде $U = \bar{K}_1 + \bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \bar{K}_2 + \bar{R}_1 + \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_2$. В этом случае «частицы», движущиеся со скоростями v_{11} и v_{12}, могут существовать одновременно.

Заключение. Приведено следующее обобщение модели, изложенной в [5]. В действие S введено дополнительное слагаемое $-F(x,t)$, которое с точки зрения внешней геометрии связано с переменным направлением отсчета. Это привело к появлению 2-й потенциальной функции $A(x,t)$. В результате модель, описываемая формулами (16), (17), (11), (13), приобрела локальную калибровочную симметрию; это можно сказать и о тождестве (14).

Поскольку для внутренних наблюдателей фаза S волновой функции лишена геометрического смысла, то для них более естественно взять за основу принцип симметрии относительно градиентного преобразования $V' = V - \partial_t f(x,t)$ (если теория уже содержит потенциал V). Чтобы при подстановке волновой функции в уравнение Шредингера тождество не нарушилось, возникает необходимость ввести добавочную фазу $f(x,t)$. В свою очередь, это приводит к необходимости заменить в уравнении $i\partial_x$ на $i\partial_x + \partial_x f(x,t)$. Поиск естественного механизма такой замены и приводит к необходимости включения в теорию новых функций A, F.

Библиографический список

1. Гончаров А.И. Стоячие волны как системы отсчета: классическая модель релятивистского пространства-времени // Известия Алтайского гос. ун-та. Сер. Физика. 2013. — №1/2 (77). DOI 10.14258/izvasu(2013)1.2–31

2. Гончаров А.И. Наглядная интерпретация релятивистской кинематики с помощью метода стоячих волн (часть 1) // Известия Алтайского гос. ун-та. Сер. Физика. — 2014. — №1/2 (81). DOI 10.14258/izvasu(2014)1.2–27

3. Гончаров А.И. Интерпретация релятивистской кинематики с помощью метода стоячих волн (часть 2) // Известия Алтайского гос. ун-та. Сер. Физика. — 2015. — №1/2 (85). DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2–02

4. Shanahan D. A Case for Lorentzian Relativity // Foundations of Physics. — 2014. — V. 44, №4.

5. Гончаров А.И. Релятивистская динамика точки как эмерджентное явление в системе стоячих волн // Известия Алтайского гос. ун-та. Сер. Физика. — 2015. — №1/1 (85). DOI 10.14258/izvasu(2015)1.1–02

6. Вейль Г. Электрон и гравитация / Г. Вейль. Математика. Теоретическая физика. — М., 1984.

7. Poelz G. On the Wave Character of the Electron // ArXiv:1206.0620 [physics. class-ph]. 2012. — URL: http://www.arxiv.org/pdf/1206.0620v18.pdf (дата обращения 20.1.2016).

8. Kim Y.S., Noz M.E. Standing Wave in the Lorentz-Covariant World // Foundations of Physics. — 2005. — V. 35, №7.

9. Mellen W.R. Moving Standing Wave and de Broglie Type Wavelength // The American Journal of Physics. — 1973. — V. 41, №2.

10. Декарт Р. Начала философии // Ренэ Декарт. Избранные произведения. — М. ; Л., 1950.

11. Nelson W.M. A Wave-Centric View of Special Relativity [Электронный ресурс] // ArXiv:1305.3022v1 [physics.class-ph]. 2013. — URL: http://www.arxiv.org/pdf/1305.3022v1.pdf (дата обращения 5.1.2016).

12. Bohm D. Wholeness and the Implicate Order // London and New York: Routledge Classics. — 2002.

13. Ребби К. Солитоны // Успехи физических наук. — 1980. – Т. 130, вып. 2.

14. Прохоров Л.В. О физике на планковских расстояниях. Струны и симметрии // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2012. — Т. 43, вып. 1.

15. Zheng-Johansson J.X. Internally Electrodynamics Particle Model: Its Experimental Basis and Its Predictions // Ядерная физика. — 2010. — Т. 73, № 3.

16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. — М., 1967.

17. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Преобразование Бэклунда для уравнения Лиувилля и калибровочные условия в теории релятивистской струны // Теоретическая и математическая физика. — 1983. – Т. 56, № 2.