

Постановка задачи о вязкоупругих колебаниях ледовой пластины в канале в результате движения нагрузки*

К.А. Шшимарев

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Problem Formulation of Ice Plate Viscoelastic Oscillations in a Channel Caused by a Moving Load

K.A. Shishmarev

Altai State University (Barnaul, Russia)

Изучаются гидроупругие волны в канале, покрытом льдом, вызванные движением нагрузки вдоль ледового покрова. Внешняя нагрузка моделируется гладким локально распределенным давлением. За основу математической модели берутся дифференциальное уравнение колебаний вязкоупругой ледовой пластины и уравнение Лапласа для потенциала скорости течения жидкости под ледовым покровом. Данные уравнения замыкаются граничными условиями непротекания на стенках и дне канала, условиями жесткого защемления льда на стенках канала и кинематическим и динамическим условием на границе раздела лед-жидкость. Исследуется решение в виде бегущей волны, которое не зависит от времени в системе координат, движущейся вместе с внешней нагрузкой. С помощью преобразования Фурье по переменной, направленной вдоль канала, рассматриваемая задача сводится к двумерной задаче относительно профиля волны поперек канала, которая решается методом нормальных мод. Работа состоит из двух частей. В данной части приводятся постановка и схема решения задачи о колебаниях ледового покрова в канале. Проведен анализ численных результатов для заданных параметров задачи.

Ключевые слова: ледовый покров, гидроупругие волны, движущаяся нагрузка, канал.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-35

Введение. Целью данного исследования является изучение возможности разрушения льда движущимся судном. Скопление льда может вызвать наводнение в северных реках в период ранней весны. Для разрушения льда может ис-

In this paper, hydroelastic waves in an ice-covered channel that are generated by a load moving along an ice sheet are studied. The external load is modeled by a localized smooth pressure distribution. A mathematical model is based on the differential equation of viscoelastic ice plate oscillations and the Laplace equation for the velocity potential of fluid flow under the ice sheet. These equations are supplemented by boundary conditions of impermeability of channel walls and channel bottom, conditions of ice rigid fixing on the channel walls, and kinematic and dynamic conditions at the interface between ice and liquid. The travelling wave solution, which is time-independent in a coordinate system moving with the external load, is studied. The Fourier transform along the channel is utilized to reduce the problem under consideration to a two-dimensional problem of wave profile across the channel, which is solved by the fixed beam normal modes method. The paper consists of 2 parts. In the first part, the ice deflection and strains in the ice sheet in the channel are calculated for given ice characteristics. The numerical results are analyzed and discussed.

Key words: ice sheet, hydroelastic waves, moving load, channel.

пользоваться судно на воздушной подушке, которое движется вдоль замороженной части реки на определенной скорости и создает напряженно-деформированное состояние ледового покрова. Вызванные напряжения могут быть достаточными для ломки льда (см., например, [1]).

Задачи о колебаниях ледового покрова хорошо изучены для случая прогрессивных волн в канале

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства № 2014/2 и гранта РФФИ № 13-08-01097.

(см., например, [2–4]), для бесконечной ледовой пластины [5] и для полубесконечного ледового покрова [6], когда лед крепится к одной вертикальной стенке. Нагрузка двигалась с постоянной скоростью вдоль ледового покрова и моделировалась точкой давления или локализованным гладким распределением внешнего давления. Задачи исследовались в рамках линейной теории гидроупругих волн.

В данной работе используется вязкоупругая модель плавающего льда. Гидроупругие волны, вызванные движением нагрузки, затухают на определенном расстоянии от нагрузки. Таким образом, ледовый покров находится в состоянии покоя вдали от движущейся нагрузки. Модель вязкоупругого льда более приближена к реальности, чем модель упругой ледовой пластины, так как в вязкоупругой модели учитывается затухание возмущенных колебаний. Следует отметить, что задача о прогрессивных волнах в канале была изучена в рамках модели упругой ледовой пластины, без учета вязкоупругих эффектов [2].

1. Постановка задачи. Рассматривается прогиб ледового покрова в трехмерном канале, вызванный движением внешней нагрузки по ледовому покрову. Канал имеет прямоугольное сечение с шириной $2L$, $(-L \leq y \leq L)$ и высотой H , $(-H \leq z \leq 0)$. По переменной x канал считается бесконечным $(-\infty < x < \infty)$, x, y, z — декартовы координаты). Канал наполнен идеальной жидкостью с плотностью ρ . Жидкость покрыта ледовым покровом постоянной толщины h_i с изгибной жесткостью $D = Eh_i^3/[12(1 - \nu^2)]$, где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона для льда. Ледовый покров канала моделируется как тонкая вязкоупругая ледовая пластина, закрепленная на стенках канала $(y = -L, L)$. Внешняя нагрузка моделируется как пятно давления, движущееся по пластине в положительном направлении оси x с постоянной скоростью U . В результате нагрузки лед отклоняется от исходного состояния $(z = 0)$ на величину $w(x, y, t)$.

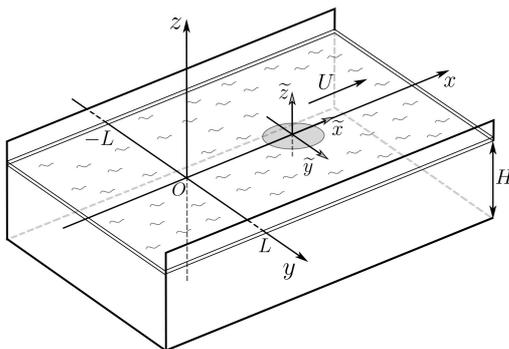


Рис. 1. Схема ледового покрова канала с нагрузкой, движущейся вдоль канала

Задача о прогибе льда формулируется в рамках линейной теории гидроупругих волн [5]. Прогиб ледовой пластины $w(x, y, t)$ описывается уравнением вязкоупругих колебаний ледовой пластины [1]:

$$Mw_{tt} + D \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w = P(x, y, t) + p(x, y, 0, t) \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0), \quad (1)$$

где $\tau = \eta/E$ — время релаксации; η — вязкость; $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$; $M = \rho_i h_i$ — масса льда на единицу площади; ρ_i — плотность льда; $p(x, y, 0, t)$ — давление на поверхности жидкости; $P(x, y, t)$ — внешнее давление, создаваемое движением нагрузки; t — время.

Внешняя нагрузка моделируется как гладкая локализованная функция $P(x, y, t)$. Нагрузка движется прямолинейно по центральной линии канала и описывается следующим образом:

$$P(x, y, t) = -P_0 P_1 \left(\frac{x - Ut}{L} \right) P_2 \left(\frac{y}{L} \right) \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L), \quad (2)$$

$$P_1 \left(\frac{x - Ut}{L} \right) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi c \frac{x - Ut}{L}) + 1}{2}, & \left| \frac{x - Ut}{L} \right| < 1/c, \\ 0, & \left| \frac{x - Ut}{L} \right| \geq 1/c, \end{cases}$$

$$P_2(y) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi k y) + 1}{2}, & |y| < 1/k, \\ 0, & |y| \geq 1/k, \end{cases}$$

где c и k — параметры нагрузки, характеризующие размер пятна давления.

Для определения гидродинамического давления на границе жидкость — лед используется линейризованное уравнение Бернулли

$$p(x, y, 0, t) = -\rho \varphi_t - \rho g w \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L), \quad (3)$$

где $\varphi(x, y, z, t)$ — потенциал скорости течения жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа; g — ускорение свободного падения.

Граничные условия для $\varphi(x, y, z, t)$ имеют вид

$$\varphi_z = w_t \quad (z = 0), \quad (4)$$

$$\varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -H). \quad (5)$$

Ледовый покров приморожен к стенкам канала, следовательно, для прогиба $w(x, y, t)$ выполнены граничные условия жесткого защемления

$$w = 0, \quad w_y = 0 \quad (y = \pm L). \quad (6)$$

Уравнение колебаний пластины (1) содержит коэффициент демпфирования $\tau \partial / \partial t$, который определяет условия затухания колебаний вдали от движущейся нагрузки для функций $\varphi(x, y, z, t)$ и $w(x, y, t)$

$$\varphi(x, y, z, t), \quad w(x, y, t) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty). \quad (7)$$

Выберем масштаб длины — L , масштаб времени — L/U и масштаб давления P_0 . Рассмотрим новую подвижную систему координат $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, оси которой параллельны осям исходной системы (x, y, z) , а центр новой системы находится в центре приложенного внешнего пятна давления и движется вдоль оси x со скоростью U . Тогда

$$\tilde{y} = \frac{y}{L}, \quad \tilde{x} = \frac{x - Ut}{L}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L},$$

$$\tilde{t} = \frac{U}{L}t, \quad \tilde{P} = P_1(\tilde{x})P_2(\tilde{y}).$$

$$w(x, y, t) = w_{sc} \tilde{w}((x - Ut)/L, y/L) =$$

$$= w_{sc} \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

$$\varphi = \varphi_{sc} \tilde{\varphi}((x - Ut)/L, y/L, z/L) =$$

$$= \varphi_{sc} \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

где $w_{sc} = P_0/(\rho g)$ и $\varphi_{sc} = UP_0/(\rho g)$ — масштаб функций w и φ соответственно.

Следовательно, задача (1)–(7) в безразмерных переменных переписывается в виде (здесь и далее знак \sim опускается)

$$\alpha \cdot \gamma \cdot \text{Fr}^2 w_{xx} + \beta \left(1 - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^4 w + w =$$

$$= \gamma \cdot \text{Fr}^2 \varphi_x - P_1(x)P_2(y)$$

$$(-\infty < x < \infty, -1 < y < 1, z = 0), \quad (8)$$

$$\Delta \varphi = 0$$

$$(-\infty < x < \infty, -1 < y < 1, -\gamma < z < 0), \quad (9)$$

$$\varphi_z = -w_x \quad (z = 0), \quad (10)$$

$$\varphi_y = 0 \quad (y = \pm 1), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -\gamma), \quad (11)$$

$$w = 0 \quad (y = \pm 1), \quad w_y = 0 \quad (y = \pm 1), \quad (12)$$

$$w, \varphi \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty), \quad (13)$$

где $\beta = D/(\rho g L^4)$; $\varepsilon = (\tau U)/L$; $\alpha = M/(\rho L) = (\rho_i h_i)/(\rho L)$ — массовый параметр; $\gamma = H/L$ — безразмерная глубина жидкости; $\text{Fr} = U/\sqrt{gH}$ — число Фруда.

Полученная задача (8)–(13) зависит от пяти безразмерных параметров, вычисляемых по заданным характеристикам ледового покрова и канала. Требуется определить прогибы $w(x, y)$ и напряжения в пластине, в том числе и вдоль стенок канала.

В рамках линейной теории напряжение в пластине пропорционально удлинению. Предел текучести материала определяется как относительное удлинение $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$, при достижении которого материал начинает деформироваться пластически. Чтобы модель оставалась реалистичной, постулируется, что относительные удлинения в ледовой пластине не могут превышать предельного значения ε_{cr} . В последующем анализе принимается $\varepsilon_{cr} = 8 \cdot 10^{-5}$ [2].

Удлинения меняются линейно по толщине льда и равны нулю на нейтральной поверхности, т.е. максимальные напряжения всегда достигаются либо на верхней, либо на нижней поверхности льда. В качестве масштаба удлинений выбирается величина $h_i w_{sc}^2 / (2L^4)$.

Для определения максимального удлинения в точке (x, y) рассматривается тензор деформаций

$$E(x, y) = -\xi \begin{pmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{xy} & w_{yy} \end{pmatrix}, \quad \xi \in [-1; 1], \quad (14)$$

где ξ — безразмерная величина, изменяющаяся по толщине льда. Чтобы определить максимальные напряжения в ледовом покрове, необходимо найти собственные значения тензора деформаций в каждой точке.

Заметим, что в рамках линейной теории максимальные удлинения пропорциональны величине P_0 внешней нагрузки.

2. Схема решения. Задача (8)–(13) решается с помощью преобразования Фурье по переменной x , направленной вдоль канала. Вместо уравнения (1) получим

$$(1 - \alpha \gamma \text{Fr}^2 \xi^2) w^F +$$

$$+ \beta (1 - i \xi \varepsilon) (w_{yyyy}^F - 2 \xi^2 w_{yy}^F + \xi^4 w^F) =$$

$$= i \xi h \text{Fr}^2 \varphi^F - P^F(\xi, y), \quad (15)$$

где

$$w^F(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{-i\xi x} dx,$$

$$P^F(\xi, y) = P_2(y)P_1^F(\xi).$$

Функцию $w^F(\xi, y)$ будем искать в виде

$$w^F(\xi, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_j(\xi)\psi_j(y), \quad (16)$$

где a_j — комплексно-значные коэффициенты разложения по модам; ψ_j — нормированные моды защемленной балки, которые определяются из решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} \psi_j^{IV} &= \lambda_j^4 \psi_j \quad (-1 < y < 1), \\ \psi_j &= \psi_j' = 0 \quad (y = \pm 1). \end{aligned} \quad (17)$$

Решение задачи (17) разбивается на четные и нечетные функции. Для нагрузки, двигающейся вдоль центральной линии канала, ненулевое решение дадут только четные моды, которые определяются по формулам [2]

$$\begin{aligned} \psi_j(y) &= A_j \left(\cos(\lambda_j y) - B_j \cosh(\lambda_j y) \right), \\ B_j &= \frac{\cos \lambda_j}{\cosh \lambda_j}, \quad A_j = \frac{1}{\sqrt{1 + (B_j)^2}}, \end{aligned} \quad (18)$$

где λ_j являются решениями уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda_j = -\operatorname{th} \lambda_j. \quad (19)$$

Подставляя (16) в уравнение (15), домножая полученное уравнение на $\psi_i(y)$ и интегрируя результат по y от -1 до 1 , получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (1 - \alpha h \operatorname{Fr}^2 \xi^2) a_i + \\ + \beta(1 - i\xi\varepsilon) \left(\lambda_i^4 a_i - 2\xi^2 \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} a_j + \xi^4 a_i \right) = \\ = \xi^2 h \operatorname{Fr}^2 \sum_{j=1}^{\infty} M_{ij} a_j - P_i(\xi), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} C_{ij} &= - \int_{-1}^1 \psi_i'(y) \psi_j'(y) dy, \\ M_{ij}(\xi) &= \int_{-1}^1 \phi_j(y, 0, \xi) \psi_i(y) dy, \end{aligned}$$

$$\varphi^F(\xi, y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\xi) \phi_j(y, z, \xi),$$

$$P_i(\xi) = P_1^F(\xi) P_i^*, \quad P_i^* = \int_{-1}^1 P_2(y) \psi_i(y) dy.$$

Функции $\phi_j(y, z, \xi)$ являются решением следующей начально-краевой задачи:

$$\phi_{j,yy} + \phi_{j,zz} = \xi^2 \phi_j \quad (-1 < y < 1, \quad -\gamma < z < 0),$$

$$\begin{aligned} \phi_{j,y} &= 0 \quad (y = \pm 1), \quad \phi_{j,z} = 0 \quad (z = -\gamma), \\ \phi_{j,z} &= \psi_j(y) \quad (z = 0). \end{aligned}$$

Интегралы C_{ij} и $M_{ij}(\xi)$ были вычислены в [2]. Коэффициенты P_j^* вычисляются аналитически для $P_2(y)$ заданной в форме (2).

Система (20) может быть записана в матричной форме

$$\begin{aligned} (1 - \alpha h \operatorname{Fr}^2 \xi^2) \mathbf{I} \vec{a} + \beta(1 - i\xi\varepsilon) \mathbf{Q} \vec{a} = \\ = \gamma \operatorname{Fr}^2 \mathbf{M} \vec{a} - \vec{P}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)^T$, $\mathbf{M} = \{\xi^2 M_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$, $\vec{P} = (P_1, P_2, \dots)^T$, $\mathbf{Q} = \mathbf{D} - 2\xi^2 \mathbf{C}$ и $\mathbf{D} = \operatorname{diag}\{\lambda_1^4 + \xi^4, \lambda_2^4 + \xi^4, \dots\}$, $\mathbf{C} = \{C_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$.

Для решения уравнения (21) вектор \vec{a} раскладывается на вещественную и мнимую части, $\vec{a} = \vec{a}^R + i\vec{a}^I$. Уравнение (21) распадается на два соответствующих уравнения для \vec{a}^R и \vec{a}^I , которые решаются численно. В рассматриваемой задаче $P_1^F(\xi)$ является четной функцией по ξ . Функции $a_j^R(\xi)$ являются четными, а функции $a_j^I(\xi)$ — нечетными по ξ .

Прогибы $w(x, y)$ вычисляются через обратное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} w(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(y) \int_0^{\infty} (a_j^R(\xi) \cos(\xi x) - \\ - a_j^I(\xi) \sin(\xi x)) d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

Функции $a_j^R(\xi)$ и $a_j^I(\xi)$ вычисляются как решение (21) при $\xi = \xi_n$, $1 \leq n \leq N_{\xi}$, с шагом $\Delta\xi$. Если в (16) принять количество мод равным N_{mod} , то с учетом уравнения (22) получим

$$w(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{N_{\text{mod}}} \psi_j(y) W_j(x),$$

$$W_j(x) = \sum_{n=1}^{N_{\xi}} \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} (a_j^R(\xi) \cos(\xi x) - a_j^I(\xi) \sin(\xi x)) d\xi,$$

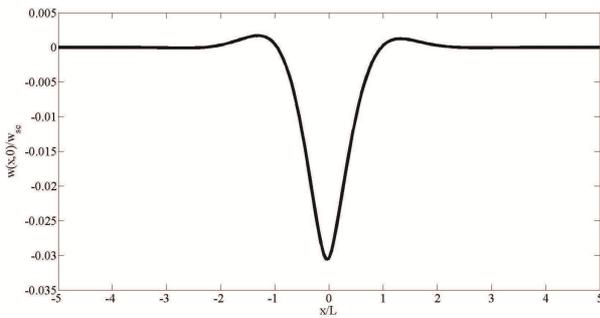


Рис. 2. Профили прогибов w вдоль центральной линии канала для $U = 4$ м/с

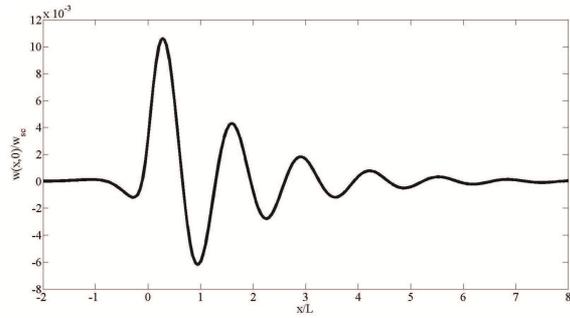


Рис. 4. Профили прогибов w вдоль центральной линии канала для $U = 8$ м/с

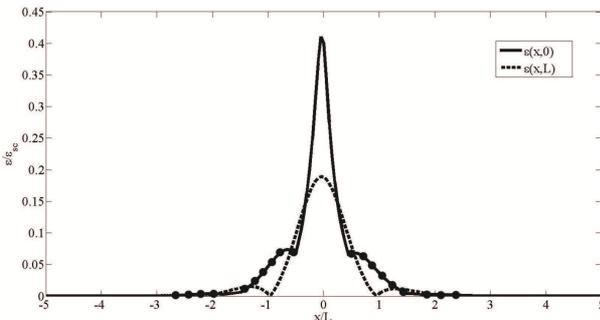


Рис. 3. Удлинения вдоль центральной линии и на стенках канала для $U = 4$ м/с

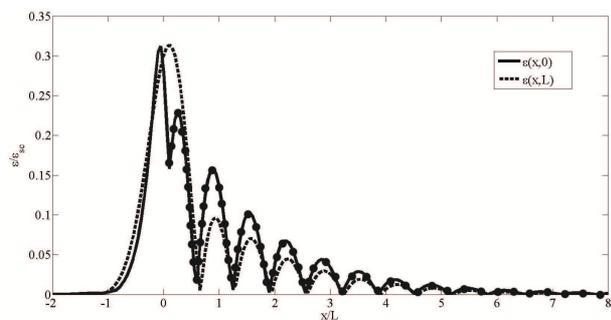


Рис. 5. Удлинения вдоль центральной линии и на стенках канала для $U = 8$ м/с

где $a_n^R(\xi)$ и $a_n^I(\xi)$ на интервалах $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ аппроксимируются линейными функциями.

3. Численные результаты. Исследуемая задача о гидроупругих волнах в канале решалась численно при следующих параметрах ледового покрова: плотность льда $\rho_i = 917$ кг/м³, модуль Юнга $E = 4.2 \cdot 10^9$ Н/м², коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$ и время релаксации льда $\tau = 0.1$ с. Толщина ледового покрова принималась равной 10 см, глубина канала — 2 м. Нагрузка (2) действовала на область 2 м × 2 м и двигалась вдоль центральной линии канала с постоянной скоростью U . Численный анализ имеет цель исследовать прогибы и удлинения в ледовом покрове в зависимости от заданных физических характеристик.

Безразмерные прогибы и распределения удлинений вдоль центральной линии канала, $y = 0$, и стенки, $y = x/L$, показаны на рисунках 2–5 как функции продольной координаты x/L в канале шириной 20 м. Точками отмечены участки графиков, где продольные удлинения больше поперечных. Отметим, что на стенках удлинения вдоль канала равны 0. Скорость $U = 5.38$ м/с является критической для первой моды для заданной ширины канала [2]. Прогибы и удлинения для докритической скорости $U = 4$ м/с изображены на рисунках 2–3, для посткритической скорости $U = 8$ м/с на рисунках 4–5. Для посткритической скорости колебания ледового покрова сосре-

доточены перед нагрузкой. Прогибы и удлинения в ледовом покрове малы на расстоянии 20 м и более от нагрузки. Максимальные удлинения достигаются вдоль центральной линии канала в области действия нагрузки для докритической скорости и как вдоль центральной линии, так и на стенках канала для посткритической скорости. Если предельное значение удлинений принять 8×10^{-5} (см. [2]), то ожидается, что для докритической скорости $U = 4$ м/с лед сломается для нагрузки с величиной P_0 превышающей 4 кПа. Соответственно, для $U = 8$ м/с лед может как оторваться от стенок, так и сломаться на центральной линии канала для $P_0 > 3.5$ кПа.

Заключение. Приведена постановка задачи о гидроупругих волнах в ледовом покрове канала, вызванных движением внешней нагрузки. Описана схема решения задачи. С помощью преобразования Фурье по переменной, направленной вдоль канала, рассматриваемая задача сведена к задаче относительно профиля волны в канале, которая решалась методом разложения на нормальные моды колебаний упругой балки. Вычислены прогибы и максимальные удлинения в канале для докритической и посткритической скорости относительно первой моды. В случае посткритической скорости увеличились напряжения вблизи стенок канала, но уменьшились напряжения под нагрузкой вдоль центральной линии канала и амплитуды прогибов. Во второй части статьи полученное

решение при увеличении ширины ледового покрова будет сравниваться с решением для бесконечной незакрепленной ледовой пластины. Ожидается, что при увеличении дистанции между стенками прогибы и удлинения в ледовом покрове будут

приближаться к соответствующим распределениям для бесконечного покрова.

Автор выражает благодарность А.А. Коробкину, Т.И. Хабахпашевой и А.А. Папину за постановку задачи и обсуждение результатов.

Библиографический список

1. Zhestkaya V.D. Numerical solution of the problem of an ice sheet under a moving load // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. — 1999. — V 40 (4).

2. Korobkin A., Khabakhpasheva T., Papin A. Waves propagating along a channel with ice cover // *European Journal of Mechanics B/Fluids*. — 2014. — V. 47.

3. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // *Известия Алт. гос. ун-та*. — 2012. — Вып. 1/1 (73).

4. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Аналитическое и численное исследование квазиизотермической задачи взаимодействия ледового покрова канала и поверхностных волн // *Известия Алт. гос. ун-та*. — 2012. — Вып. 1/2 (73).

5. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving loads on ice. — 1996.

6. Brocklehurst P., Korobkin A.A., Părău E.I. Interaction of hydro-elastic waves with a vertical wall // *Journal Engineering Mathematic*. — 2010, № 68.