УДК 512.75

Об аксиоматическом ранге квазимногообразия $\mathcal{M}^{p^2}$

С.А. Шахова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On the Axiomatic Rank of the Quasivariety $\mathcal{M}^{p^2}$

S.A. Shakhova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Пусть p — простое число, $p \neq 2$, H_{p^2} — группа, имеющая в многообразии нильпотентных ступени не выше двух групп следующее представление: $H_{p^2} = gr(x, y || x^{p^2} = y^{p^2} = [x, y]^p = 1)$. Обозначим через qH_{p^2} наименьшее квазимногообразие, содержащее группу H_{p^2}, а через $\mathcal{M}^{p^2} = L(qH_{p^2})$ — класс Леви, порожденный квазимногообразием qH_{p^2}. Согласно определению, класс Леви $L(qH_{p^2})$ состоит из всех групп, в которых нормальное замыкание каждого элемента принадлежит qH_{p^2}. Известно, что класс Леви, порожденный квазимногообразием, также является квазимногообразием. Кроме того, известны квазитождества, задающие квазимногообразие $\mathcal{M}^{p^2}$. Список этих квазитождеств бесконечен и содержит квазитождества от любого сколь угодно большого числа переменных. Совокупность квазитождеств, задающих квазимногообразие, называется базисом этого квазимногообразия. Говорят, что квазимногообразие имеет конечный аксиоматический ранг, если его можно задать базисом от конечного числа переменных. Возникает естественный вопрос: является ли квазимногообразие $\mathcal{M}^{p^2}$ конечно аксиоматизируемым? Доказано, что аксиоматический ранг квазимногообразия $\mathcal{M}^{p^2}$ конечен. Как оказалось, квазимногообразие $\mathcal{M}^{p^2}$ можно задать квазитождествами от трех переменных.

Ключевые слова: квазимногообразие, квазитождество, группа, нильпотентная группа, класс Леви, аксиоматический ранг.

Let p be a prime number, $p \neq 2$, H_{p^2} be a group with the following presentation in the variety of nilpotent groups of class at most two: $H_{p^2} = gr(x, y || x^{p^2} = y^{p^2} = [x, y]^p = 1)$ and let qH_{p^2} be the quasivariety generated by the group H_{p^2}. We denote $\mathcal{M}^{p^2} = L(qH_{p^2})$, where $L(qH_{p^2})$ is the Levi class generated by the quasivariety qH_{p^2}. By definition, the Levi class $L(qH_{p^2})$ is a class of all groups where the normal closure of every there element belongs to qH_{p^2}. It is well known that the Levi class generated by a quasivariety is a quasivariety too. Besides, the list of quasi-identities that defines the quasivariety $\mathcal{M}^{p^2}$ is known. There is an infinite number of quasi-identities with an arbitrarily large number of variables in the list. The base of the quasivariety is the set of quasi-identities that defines this quasivariety. By the definition, the axiomatic rank of the quasivariety is finite if there is a base of the quasivariety with a finite number of variables. The following question arises: is it true that the axiomatic rank of the quasivariety $\mathcal{M}^{p^2}$ is finite? It is proven that the axiomatic rank of the quasivariety $\mathcal{M}^{p^2}$ is finite, and there is a base of the quasivariety $\mathcal{M}^{p^2}$ that depends on three variables..

Key words: quasivariety, quasi-identity, group, nilpotent group, Levi class, axiomatic rank.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-33

1. Введение. Совокупность квазитождеств, задающих квазимногообразие, называется базисом этого квазимногообразия. Говорят, что квазимногообразие имеет конечный аксиоматический ранг, если его можно задать базисом от конечного числа переменных. Аксиоматический ранг квазимногообразия является одной из важнейших его характеристик. Впервые задача изучения аксиоматических рангов квазимногообразий была поставлена Д.М. Смирновым [1] (вопрос 3.52). К настоящему времени найдены аксиоматические ранги многих квазимногообразий. Так, А.Ю. Ольшанский [2] установил, что квазимногообразие, порожденное конечной группой с абелевыми силовскими подгруппами, конечно аксиоматизируемо. А.К. Румянцев [3] исследовал аксиоматический ранг квазимногообразия, порожденного всеми конечными группами. Вопросам аксиоматизируемости квазимногообразий посвящены работы А.И. Будкина [4–6].

Как следует из этих работ, аксиоматические ранги большого класса неабелевых квазимногообразий, среди которых квазимногообразия, порожденные свободной группой, группой с одним определяющим соотношением, свободной разрешимой группой, оказались бесконечными. Аксиоматические ранги квазимногообразий нильпотентных групп без кручения исследовались Е.С. Половниковой в [7].

Пусть $\mathcal{N}_c$ — многообразие нильпотентных ступени не выше c групп. Рассмотрим группу H_{p^s}, имеющую в $\mathcal{N}_2$ следующее представление: $H_{p^s} = gr(x,y||x^{p^s} = y^{p^s} = [x,y]^p = 1)$, где p — простое нечетное число. Через qH_{p^s} будем обозначать квазимногообразие, порожденное группой H_{p^s}; $L(qH_{p^s})$ — класс Леви, порожденный квазимногообразием qH_{p^s}, т.е. класс всех групп G, в которых нормальное замыкание x^G любого элемента $x \in G$ принадлежит qH_{p^s}. Классы Леви 2-ступенно нильпотентных квазимногообразий групп изучались В.В. Лодейщиковой в [8–10]. В [10] доказано, что класс Леви, порожденный квазимногообразием qH_{p^s}, совпадает с квазимногообразием $\mathcal{M}^{p^s}$, задаваемым в многообразии $\mathcal{N}_3$ следующими тождествами и квазитождествами:

$$(\forall x)\left(x^{p^s}=1\right), \quad (1)$$

$$(\forall x)(\forall y)\left([x,y,x]^p=1\right), \quad (2)$$

$$(\forall x)(\forall y_1)\dots(\forall y_k)(\forall u)\left(x^{p^m}=\prod_{i=1}^{k}[x,y_i,x]\to[x,u,x]=1\right), \quad (3)$$

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_k)(\forall y_1)\dots(\forall y_k)\left(\left(x^{p\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]^{\varepsilon_i}\right)^{p^m}=\prod_{i=1}^{k}[x,y_i,x]\to\prod_{i=1}^{k}[x,x_i,x]^{\varepsilon_i}=1\right), \quad (4)$$

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_k)(\forall y_1)\dots(\forall y_k)\left(\left(x^{p\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]^{\varepsilon_i}\right)^{p^m}=\prod_{i=1}^{k}[x,y_i,x]\to\prod_{i=1}^{k}[x,y_i,x]=1\right), \quad (5)$$

где $\varepsilon_i (i=1,\dots,k), \delta$, и k пробегают множество натуральных чисел, $m=1,\dots,s-1$.

А.И. Будкин поставил вопрос: верно ли, что квазимногообразие $\mathcal{M}^{p^s}$ имеет конечный аксиоматический ранг? В случае $s=2$ ответ на этот вопрос оказался положительным. В данной работе доказано, что квазимногообразие $\mathcal{M}^{p^2}$ конечно аксиоматизируемо.

2. Предварительные замечания. Прежде всего отметим, что используемые в работе сведения из теории групп можно найти в [11], а из теории квазимногообразий групп — в [12,13].

Обозначим через $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathcal{M}$ — многообразие, заданное в многообразии $\mathcal{N}_3$ тождествами (1), (2). Утверждение следующей леммы легко доказывается индукцией по переменной n.

Лемма 1. *В многообразии $\mathcal{M}$ для всех $n \in \mathbf{N}$ истинны коммутаторные тождества*

$$(\forall x)(\forall y)\left([x,y^n]=[x,y]^n\,[x,y,y]^{\frac{n(n-1)}{2}}\right), \quad (6)$$

$$(\forall x)(\forall y)\left((xy)^n=x^ny^n\,[y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot[y,x,x]^{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}\,[y,x,y]^{\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)}\right). \quad (7)$$

Замечание. Из (6) при $n=p$ получается формула

$$(\forall x)(\forall y)\left([x,y^p]=[x,y]^p\right). \quad (8)$$

Во всех дальнейших рассуждениях будем полагать $s=2$. Значит, $m=1$.

Лемма 2. *Множество квазитождеств из списков (3)–(5) эквивалентно следующему множеству квазитождеств*:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall u)\left(x^p=[x,y,x]\to[x,u,x]=1\right), \quad (9)$$

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_k)(\forall y)\left(\left(x^{p\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]\right)^{p}=[x,y,x]\to\prod_{i=1}^{k}[x,x_i,x]=1\right), \quad (10)$$

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_k)(\forall y)\left(\left(x^{p\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]\right)^{p}=[x,y,x]\to[x,y,x]=1\right), \quad (11)$$

где $\delta, k \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Поскольку квазимногообразие $\mathcal{M}^{p^2}$ нильпотентно ступени ≤ 3, то

$$\prod_{i=1}^{k}[x,y_i,x]=[x,\prod_{i=1}^{k}y_i,x],$$

и квазитождества (3)–(5) можно записать в виде

$$(\forall x)(\forall y)(\forall u)\left(x^p=[x,y,x]\to[x,u,x]=1\right),$$

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_k)(\forall y)$$
$$\left(\left(x^{p\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]^{\varepsilon_i}\right)^p=[x,y,x]\to\right.$$
$$\left.\to\prod_{i=1}^{k}[x,x_i,x]^{\varepsilon_i}=1\right),$$

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_k)(\forall y)$$
$$\left(\left(x^{p\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]^{\varepsilon_i}\right)^p=[x,y,x]\to[x,y,x]=1\right),$$

где $\varepsilon_i(i=1,\dots,k),\delta,k\in\mathbf{N}$.

Принимая во внимание тождество (6), получаем, что

$$[x,x_i^{\varepsilon_i}]=[x,x_i]^{\varepsilon_i}\,[x,x_i,x_i]^{\frac{\varepsilon_i(\varepsilon_i-1)}{2}},i=1,\dots,k,$$

$$\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]^{\varepsilon_i}=\prod_{i=1}^{k}\left([x,x_i^{\varepsilon_i}]\,[x,x_i,x_i]^{\frac{-\varepsilon_i(\varepsilon_i-1)}{2}}\right),$$

$$\left(x^{p\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]^{\varepsilon_i}\right)^p=\left(x^{p\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i^{\varepsilon_i}]\right)^p,$$

так как в силу тождества (2)

$$\left(\prod_{i=1}^{k}[x,x_i,x_i]^{\frac{-\varepsilon_i(\varepsilon_i-1)}{2}}\right)^p=1.$$

Продолжая преобразовывать квазитождества (4), (5), получаем

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_k)((\forall y)$$
$$\left(\left(x^{p\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i^{\varepsilon_i}]\right)^p=[x,y,x]\to\right.$$
$$\left.\to\prod_{i=1}^{k}[x,x_i^{\varepsilon_i},x]=1\right),$$

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_k)(\forall y)$$
$$\left(\left(x^{p\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i^{\varepsilon_i}]\right)^p=[x,y,x]\to[x,y,x]=1\right),$$

где $\varepsilon_i(i=1,\dots,k)$, δ, $k\in\mathbf{N}$.

Таким образом, квазитождества (4), (5) являются эквивалентными квазитождествам вида

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_k)((\forall y)$$
$$\left(\left(x^{p\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]\right)^p=[x,y,x]\to\right.$$
$$\left.\to\prod_{i=1}^{k}[x,x_i,x]=1\right),$$

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_k)(\forall y)$$
$$\left(\left(x^{p\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]\right)^p=[x,y,x]\to[x,y,x]=1\right),$$

где $\delta,k\in\mathbf{N}$. Лемма 2 доказана полностью.

Лемма 3. *Множество квазитождеств из списков* (3)–(5) *эквивалентно следующему множеству квазитождеств*:

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_k)(\forall y)$$
$$\left(\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]^p=[x,y,x]\to\prod_{i=1}^{k}[x,x_i,x]=1\right),\quad(12)$$

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_k)(\forall y)$$
$$\left(\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]^p=[x,y,x]\to[x,y,x]=1\right),\quad(13)$$

где $k\in\mathbf{N}$.

Доказательство. По лемме 2 квазитождество (3) записывается в виде (9) и, очевидно, является следствием квазитождества (12).

В силу леммы 2 достаточно преобразовать левые части квазитождеств (10), (11) к требуемому виду. Используем для этого формулу (7) и тождество (1). Имеем

$$\left(x^{p\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]\right)^p=$$
$$=x^{p^2\delta}\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]^p\left[\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]\,,x^{p\delta}\right]^{\frac{p(p-1)}{2}}=$$
$$=\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]^p\,.$$

Лемма доказана.

3. Основной результат.

Теорема. *Квазимногообразие* $\mathcal{M}^{p^2}$ *имеет конечный аксиоматический ранг. В многообразии* $\mathcal{N}_3$ *квазимногообразие* $\mathcal{M}^{p^2}$ *задается тождествами* (1) ($s=2$), (2) *и квазитождествами*

$$(\forall x)(\forall u)(\forall y)\quad ([x,u]^p=[x,y,x]\to[x,u,x]=1)\,, \quad (14)$$

$$(\forall x)(\forall u)(\forall y)\quad ([x,u]^p=[x,y,x]\to[x,y,x]=1)\,. \quad (15)$$

Доказательство. По лемме 3 достаточно заметить, что квазитождества (12), (13) являются следствиями квазитождеств (14), (15). Для этого проведем преобразование левой части квазитождеств (12), (13). В силу метабелевости многообразия $\mathcal{M}$ и тождества (8) имеем:

$$\left(\prod_{i=1}^{k}[x,x_i]\right)^p = \prod_{i=1}^{k}[x,x_i]^p = \prod_{i=1}^{k}[x,x_i^p]\,.$$

Применяя тождество (1) ($s=2$), получаем равенство

$$\prod_{i=1}^{k}[x,x_i^p]=\left[x,\prod_{i=1}^{k}x_i^p\right].$$

Индукцией по числу k доказывается истинность равенства

$$\prod_{i=1}^{k}[x,x_i^p] = \left[x,\left(\prod_{i=1}^{k}x_i\left(\prod_{i<j}^{k}[x_i,x_j]\right)^{\frac{p-1}{2}}\right)^p\right]$$

для любых натуральных k.

Пусть квазитождество (14) истинно. Предположим, что левая часть квазитождества (12) истинна. Тогда

$$\prod_{i=1}^{k}[x,x_i^p]=\left[x,\left(\prod_{i=1}^{k}x_i\left(\prod_{i<j}^{k}[x_i,x_j]\right)^{\frac{p-1}{2}}\right)^p\right]= \\ =[x,y,x]\,.$$

Поскольку квазитождество (14) истинно, то получаем равенство

$$\left[x,\prod_{i=1}^{k}x_i\left(\prod_{i<j}^{k}[x_i,x_j]\right)^{\frac{p-1}{2}},x\right]=1.$$

Следовательно,

$$\left[x,\prod_{i=1}^{k}x_i,x\right]=\prod_{i=1}^{k}[x,x_i,x]=1.$$

Итак, правая часть квазитождества (12) тоже истинна. Аналогично доказывается, что (13) является следствием (15). Теорема доказана.

В заключение автор выражает искреннюю признательность профессору А.И. Будкину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Библиографический список

1. Коуровская тетрадь (нерешенные проблемы теории групп). — Новосибирск, 1980.

2. Ольшанский А.Ю. Условные тождества в конечных групах // Сибирский математический журнал. — 1974. — Т. 15, № 6.

3. Румянцев А.К. О квазитождествах конечных групп // Алгебра и логика. — 1980. — Т. 19, № 4.

4. Будкин А.И. О квазитождествах в свободной группе // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 1.

5. Будкин А.И. Квазитождества нильплтентных групп и групп с одним определяющим соотношением // Алгебра и логика. — 1979. — Т. 18, № 2.

6. Будкин А.И. Аксиоматический ранг квазимногообразия, содержащего свободную разрешимую группу // Математический сборник. — 1980. — Т. 112, № 4.

7. Половникова Е.С. Об аксиоматическом ранге квазимногообразий // Сибирский математический журнал. — 1999. — Т. 40, № 1.

8. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. — 2010. — Т. 51, № 6.

9. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты 8 // Известия Алт. гос. ун-та. — 2010. — Т. 65, № 1/2.

10. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50, № 1.

11. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. — М., 1972.

12. Будкин А.И. Квазимногообразия групп. — Барнаул, 2002.

13. Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий групп. — Новосибирск, 1999.