

## Односторонние поверхности

М.А. Чешкова

<sup>1</sup> Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

## One-Sided Surfaces

М.А. Cheshkova

<sup>1</sup> Altai State University (Barnaul, Russia)

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности обносится нормальный вектор. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным, независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность. Простейшей односторонней поверхностью является лист Мебиуса. К односторонним поверхностям относятся также скрещенный колпак, римская поверхность, поверхность Боя, бутылка Клейна. Пусть на торе задана замкнутая кривая с помощью  $4\pi$ -периодической вектор-функции  $\rho = \rho(v)$ . Тогда функция  $s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho(v + 2\pi))$  есть  $2\pi$ -периодическая, а функция  $l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho(v + 2\pi))$  есть  $2\pi$ -антипериодическая. Используя найденные функции, определяются уравнения листа Мебиуса, бутылки Клейна и скрещенного колпака. Вдоль замкнутой кривой  $s = s(v)$  на поверхности определяется нормальный вектор. При возвращении в исходную точку кривой направление нормали противоположное исходному направлению. С помощью системы компьютерной математики строятся исследуемые поверхности.

**Ключевые слова:** бутылка Клейна, лист Мебиуса, скрещенный колпак,  $2\pi$ -периодическая функция,  $2\pi$ -антипериодическая функция.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-30

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2].

К односторонним поверхностям относятся: скрещенный колпак [3], бутылка Клейна [3, 4]. В работах [4, 5] показано разрезание бутылки Клейна на два листа Мебиуса. В [6] исследуется плоский лист Мебиуса.

В евклидовом пространстве  $E^3$  рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую  $\gamma$  без самопересечения, заданную  $4\pi$ -периодической вектор-функцией  $\rho = \rho(v)$ , которая не является  $2\pi$ -периодической и  $2\pi$ -антипериодической.

Let a normal vector be defined along a closed curve on surfaces. If you return to the starting point, and the normal direction coincides with the original one, regardless of the choice of the curve, then the surface is called bilateral. Otherwise, we have a one-sided surface. The Möbius band is the one-sided surface. Cross-cap, Roman surface, Boy surface, Klein bottle are also one-sided surfaces. We define the closed curve on the torus using  $4\pi$ -periodic vector-function  $\rho = \rho(v)$ . Then vector-function  $s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho(v + 2\pi))$  is a  $2\pi$ -periodic vector-function, and the function  $l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho(v + 2\pi))$  is a  $2\pi$ -antiperiodic vector-function. The equations of the Möbius band, Klein bottle and cross-cap are defined using the obtained functions. A normal vector is defined along a closed curve  $s = s(v)$ . If you return to the starting point then the normal direction is opposite to the original one. Examples of these surfaces are constructed using a mathematical software package.

**Key words:** Klein bottle, Möbius band, cross-cap,  $2\pi$ -periodic function,  $2\pi$ -antiperiodic function.

Так как

$$\rho(v) = \rho(v + 4\pi), \quad (1)$$

то функция

$$s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho_1(v)), \quad (2)$$

где

$$\rho_1(v) = \rho(v + 2\pi), \quad (3)$$

есть  $2\pi$ -периодическая, не равная нулю, а вектор-функция

$$l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho_1(v)) \quad (4)$$

есть  $2\pi$ -антипериодическая, не равная нулю.

С помощью этих функций построим примеры односторонних поверхностей.

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности обносится нормальный вектор. Если при вращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным, независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность.

Рассмотрим линейчатую поверхность

$$r(u, v) = s(v) + ul(v). \quad (5)$$

Если при этом кривая  $s = s(v)$  не вырожденная, а вектор  $l(v)$  не параллелен постоянному, то когда точка кривой  $s = s(v)$  завершит полный оборот, прямая  $L = (s(v), l(v))$  сменит направление на противоположное.

Вектор-функция  $r(u, v) = s(v) + ul(v)$ , определяет лист Мебиуса, для которого  $s = s(v)$  — средняя линия, а  $\rho = \rho(v) = r(1, v)$  — край.

Рассмотрим вектор нормали  $n = [r_v, r_u] = [s'(v), l(v)]$  вдоль линии  $s = s(v)$ . Так как  $s'(v) = s'(v + 2\pi)$ ,  $l(v) = -l(v + 2\pi)$ , то получим  $n(v) = -n(v + 2\pi)$ . Вектор  $n = n(v)$  сменит направление на противоположное, когда точка кривой  $s = s(v)$  завершит полный оборот. Поверхность  $M$  есть односторонняя.

Определим поверхность  $K$  уравнением

$$r(u, v) = s(v) + \sin(u)l(v) \pm \sin(mu)(l(v + \pi) + f(v)e) \quad (6)$$

$u = -\pi, \dots, \pi, v = 0, \dots, 2\pi$ , где  $f = f(v)$  —  $2\pi$ -антипериодическая функция а вектор  $e$  есть постоянный.

Вектор  $f(v)e$  удобно выбрать так, чтобы векторы  $l(v)$ ,  $l(v + \pi) + f(v)e$  были ортогональные.

Если  $m$  — четное число, то кривая  $v = const$  есть кривая типа восьмерки с  $m$  секциями и поверхность замкнутая.

Если  $m$  — нечетное число, то кривая  $v = const$  есть незамкнутая кривая, а поверхность  $K$  есть поверхность с краем.

При  $m = 1$  это отрезок прямой и поверхность  $K$  есть прямолинейный лист Мебиуса.

Исследуем вектор нормали вдоль замкнутой кривой  $r(0, v) = s(v)$ .

Имеем  $n(v) = [r_v, r_u] = [s'(v), l(v)] \pm m[s'(v), l(v + \pi) + f(v)e]$ . Так как  $n(v) = -n(v + 2\pi)$ , то поверхность  $K$  есть односторонняя поверхность.

Рассмотрим еще одну замкнутую поверхность  $P$

$$r(u, v) = s(v) + \cos(u)l(v) + \sin(u)s(v). \quad (7)$$

Вектор нормали вдоль кривой  $s = 2s(v)$  ( $\cos(u) = 0$ ) равен  $n(v) = [r_v, r_u] = [2s'(v), l(v)]$ . Он сменит направление на противоположное, когда точка кривой  $s = 2s(v)$  завершит полный оборот.

Поверхность  $P$  также односторонняя.

Будем исследовать эти поверхности, когда кривая  $\rho = \rho(v)$  расположена на торе.

Рассмотрим тор

$$r(u, v) = ((a + b \cos(u)) \cos(v), (a + b \cos(u)) \sin(v), b \sin(u)). \quad (8)$$

Зададим линию  $u = kv/2$ , где  $k$  — нечетное число.

Тогда вектор-функция

$$\rho(v) = ((a + b \cos(kv/2)) \cos(v), (a + b \cos(kv/2)) \sin(v), b \sin(kv/2)) \quad (9)$$

есть  $4\pi$ -периодическая функция, которая не является  $2\pi$ -периодической и  $2\pi$ -антипериодической (обмотка тора).

Имеем

$$s(v) = (a \cos(v), a \sin(v), 0), \quad (10)$$

$$l(v) = (b \cos(kv/2) \cos(v), b \cos(kv/2) \sin(v), b \sin(kv/2)). \quad (11)$$

Замечаем, что кривая  $s = s(v)$  есть окружность.

Построим кривые (9), (10) и поверхности (5)–(7), используя математический пакет.

**Пример 1,  $a > b$ .**

Положим в (8)  $a = 2$ ,  $b = 1$ , в (9)  $k = 1$ , в (6)  $m = 2$ ,  $f = -2 \cos(v/2)$ ,  $e = (0, 0, 1)$  и построим тор (8)  $u = 0, \dots, 2\pi$ ,  $v = 0, \dots, 2\pi$ , обмотку тора (9)  $\rho = \rho(v)$ ,  $v = 0, \dots, 4\pi$  при  $k = 1$  (рис. 1).

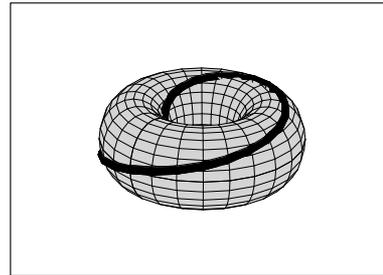


Рис. 1. Обмотка тора,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $u = v/2$

Образующие кривые в (6) при  $v = \pi/6$ ,  $m = 2$  и  $m = 3$  и окружность (10) имеют вид (рис. 2).

Имеем

$$l(v + \pi) = (\sin(v/2) \cos(v), \sin(v/2) \sin(v), \cos(v/2)). \quad (12)$$

Тогда (5) есть уравнение классического листа Мебиуса (рис. 3).

$$r(u, v) = ((u \cos(v/2) + 2) \cos(v), (u \cos(v/2) + 2) \sin(v), u \sin(v/2)),$$

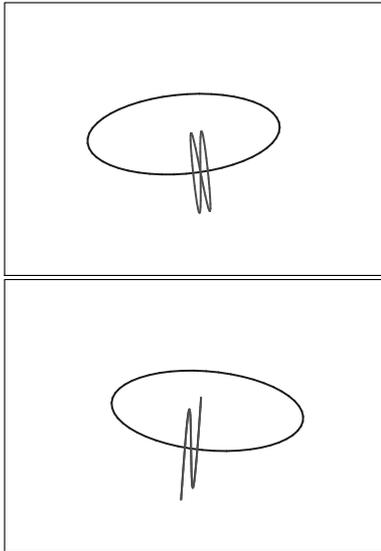


Рис. 2. Кривые при  $m = 2$  и при  $m = 3$

$$u = -1, \dots, 1, \quad v = 0, \dots, 2\pi.$$

Уравнение (6) при  $m = 2$ ,  $f = -2 \cos(v/2)$ ,  $e = (0, 0, 1)$  определяет классическую бутылку Клейна, заданную в виде восьмерки (рис. 3)

$$\begin{aligned} r(u, v) = & (2 \cos(v) + \sin(u) \cos(v/2) \cos(v) - \\ & - \sin(2u) \sin(v/2) \cos(v), \\ & 2 \sin(v) + \sin(u) \cos(v/2) \sin(v) - \\ & - \sin(2u) \sin(v/2) \sin(v), \\ & \sin(u) \sin(v/2) + \sin(2u) \cos(v/2)), \\ & u = -\pi, \dots, \pi, \quad v = 0, \dots, 2\pi. \end{aligned}$$

Следует заметить, что, в силу (11), (12) векторы  $l(v)$ ,  $l(v + \pi) + f(v)e$  ортогональны окружности.

Поверхность (7) является моделью проективной плоскости. Если от этой модели отрезать плоскостью небольшой диск, то оставшаяся часть есть скрещенный колпак (рис. 3).

$$\begin{aligned} r(u, v) = & (\cos(u) \cos(v/2) \cos(v) + \\ & + 2 \cos(v)(1 + \sin(u)), \cos(u) \cos(v/2) \sin(v) + \\ & + 2 \sin(v)(1 + \sin(u)), \cos(u) \sin(v/2)), \\ & u = 0, \dots, 2\pi, \quad v = 0, \dots, 2\pi. \end{aligned}$$

Если нечетное  $k > 1$ , то имеем перекрученные поверхности.

Положим в (6)  $m = 3$ .

Имеем криволинейный лист Мебиуса (рис. 4). Уравнение его имеет вид

$$\begin{aligned} r(u, v) = & (2 \cos(v) + \sin(u) \cos(v/2) \cos(v) - \\ & - \sin(3u) \sin(v/2) \cos(v), 2 \sin(v) + \\ & + \sin(u) \cos(v/2) \sin(v) - \\ & - \sin(3u) \sin(v/2) \sin(v), \\ & \sin(u) \sin(v/2) + \sin(u) \cos(v/2)), \\ & u = -\pi, \dots, \pi, \quad v = 0, \dots, 2\pi. \end{aligned}$$

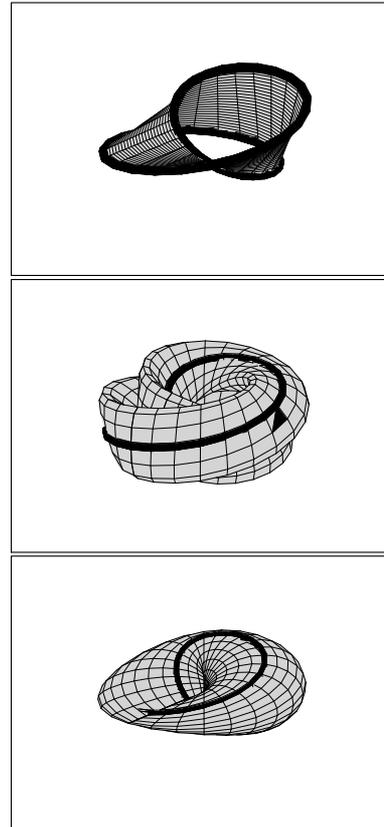


Рис. 3. Лист Мебиуса, бутылка Клейна скрещенный колпак  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $u = v/2$

$$\begin{aligned} & - \sin(3u) \sin(v/2) \sin(v), \\ & \sin(u) \sin(v/2) + \sin(3u) \cos(v/2)), \\ & u = -\pi, \dots, \pi, \quad v = 0, \dots, 2\pi. \end{aligned}$$

Рассмотрим еще криволинейный лист Мебиуса

$$\begin{aligned} r(u, v) = & (2 \cos(v) + \sin(u) \cos(v/2) \cos(v) + \\ & + \sin(3u) \sin(v/2) \cos(v), 2 \sin(v) + \\ & + \sin(u) \cos(v/2) \sin(v) + \sin(3u) \sin(v/2) \sin(v), \\ & \sin(u) \sin(v/2) + \sin(3u) \cos(v/2)), \\ & u = -\pi, \dots, \pi, \quad v = 0, \dots, 2\pi. \end{aligned}$$

Соединим эти два листа, полагая  $u = -\pi/3, \dots, \pi/3$ . Получим бутылку Клейна (рис. 4).

Если положить  $m = 1$ , то образующая кривая есть отрезок прямой и мы имеем линейчатый лист Мебиуса.

$$\begin{aligned} r(u, v) = & (2 \cos(v) + \sin(u) \cos(v/2) \cos(v) - \\ & - \sin(u) \sin(v/2) \cos(v), 2 \sin(v) + \\ & + \sin(u) \cos(v/2) \sin(v) - \sin(u) \sin(v/2) \sin(v), \\ & \sin(u) \sin(v/2) + \sin(u) \cos(v/2)), \\ & u = -\pi, \dots, \pi, \quad v = 0, \dots, 2\pi. \end{aligned}$$

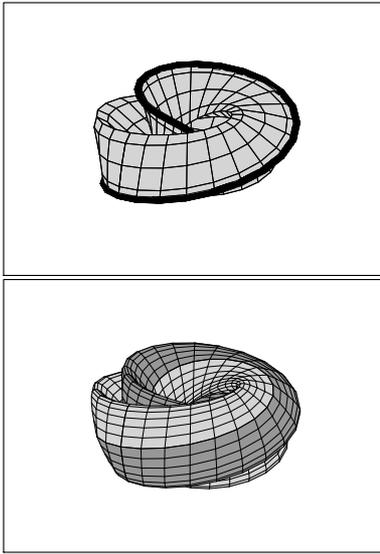


Рис. 4. Криволинейный лист Мебиуса и бутылка Клейна,  $a = 2, b = 1, u = v/2, m = 3$

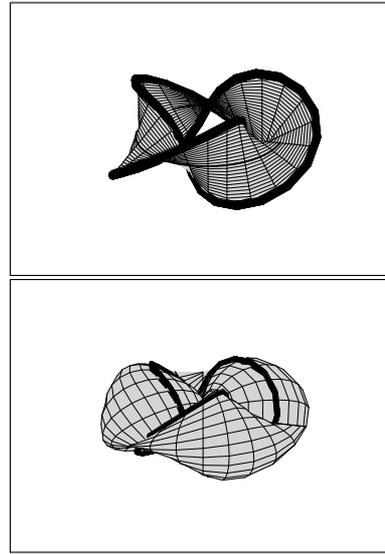


Рис. 5. Перекрученный лист Мебиуса и перекрученный скрещенный колпак,  $a = 2, b = 1, u = 3v/2$

Если  $u = 3v/2$ , то имеем перекрученные поверхности. Построим перекрученный лист Мебиуса (рис. 5)

$$r(u, v) = ((u \cos(3v/2) + 2) \cos(v), \\ (u \cos(3v/2) + 2) \sin(v), u \sin(3v/2)), \\ u = -1, \dots, 1, \quad v = 0, \dots, 2\pi$$

и перекрученный скрещенный колпак (рис. 5)

$$r(u, v) = (\cos(u) \cos(3v/2) \cos(v) + \\ + 2 \cos(v)(1 + \sin(u)), \cos(u) \cos(3v/2) \sin(v) + \\ + 2 \sin(v)(1 + \sin(u)), \cos(u) \sin(3v/2)), \\ u = 0, \dots, 2\pi, \quad v = 0, \dots, 2\pi.$$

**Пример 2,  $a < b$ .**

Положим в (8)  $a = 1/2, b = 1$ , в (9)  $k = 1$ . Построим для наглядности половину тора, обмотку на нем и лист Мебиуса (рис. 6).

Замечаем, что лист Мебиуса касается себя. Если  $a < 1/2, b = 1$ , то имеем пересечение листа Мебиуса.

Для бутылки Клейна в (6) возьмем  $m = 2, f = -2 \cos(v/2), e = (0, 0, 1)$  и определим уравнения бутылки Клейна и скрещенного колпака.

Имеем

$$r(u, v) = (1/2 \cos(v) + \sin(u) \cos(v/2) \cos(v) + \\ \sin(2u) \sin(v/2) \cos(v), 1/2 \sin(v) + \\ \sin(u) \cos(v/2) \sin(v) + \sin(2u) \sin(v/2) \sin(v), \\ \sin(u) \sin(v/2) - \sin(2u) \cos(v/2)), \\ u = -\pi, \dots, \pi, \quad v = 0, \dots, 2\pi,$$

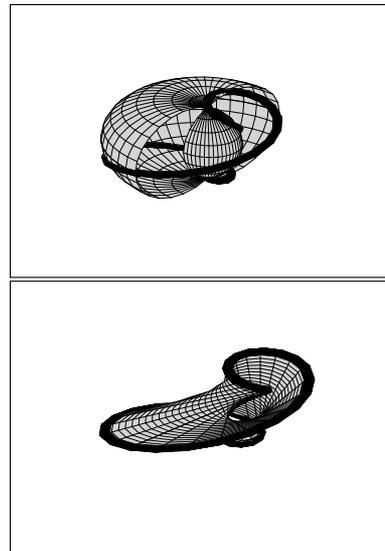


Рис. 6. Обмотка тора и лист Мебиуса,  $a = 1/2, b = 1, u = v/2$

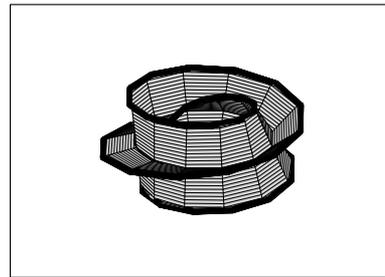


Рис. 7. Лист Мебиуса,  $a = 2, b = 1, u = t/2, v = 2t$

$$r(u, v) = (\cos(u) \cos(v/2) \cos(v) + \\ + 1/2 \cos(v)(1 + \sin(u)), \cos(u) \cos(v/2) \sin(v) + \\ + 1/2 \sin(v)(1 + \sin(u)), \cos(u) \sin(v/2)), \\ u = 0, \dots, 2\pi, \quad v = 0, \dots, 2\pi.$$

**Пример 3.**

Рассмотрим случаи, когда обмотка тора задана уравнениями  $u = t/2$ ,  $v = 2t$ ,  $t = 0, \dots, 4\pi$ .

Уравнение листа Мебиуса при  $a = 2$ ,  $b = 1$  имеет вид

$$r(u, v) = (u \cos(1/2v) + 2) \cos(2v),$$

$$(u \cos(1/2v) + 2) \sin(2v), u \sin(1/2v)),$$

$$u = -1, \dots, 1, \quad v = 0, \dots, 2\pi.$$

Если обмотка тора задана уравнениями  $u = 3t/2$ ,  $v = 2t$ ,  $t = 0, \dots, 4\pi$ , то уравнение листа Мебиуса при  $a = 2$ ,  $b = 1$  примет вид

$$r(u, v) = (u \cos(3/2v) + 2) \cos(2v),$$

$$(u \cos(3/2v) + 2) \sin(2v), u \sin(3/2v)),$$

$u = -1, \dots, 1$ ,  $v = 0, \dots, 2\pi$ . и мы имеем перекрученный лист Мебиуса.

Построим лист Мебиуса (рис. 7) при  $u = 3t/2$ ,  $v = 2t$ ,  $t = 0, \dots, 4\pi$ .

**Библиографический список**

1. Mashke Н. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos. — 1900. — V. 1, № 1.
2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. — 2007. — Т. 71, № 5.
3. Кривошпакко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. — М., 2006.
4. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М., 1981.
5. Чешкова М.А. О бутылке Клейна // Известия Алт. гос. ун-та. — 2012. — № 1/1.
6. Чешкова М.А. О плоском листе Мебиуса // Известия Алт. гос. ун-та. — 2013. — № 1/2. DOI: 10.14258/izvasu(2013)1.2-09.