УДК 517.9

Конечное время стабилизации решения уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде*

М.А. Токарева

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Finite Time Stabilization of a Solution for Equations of Fluid Filtration in a Poroelastic Medium

M.A. Tokareva

Altai State University (Barnaul, Russia)

Задачи фильтрации в пористых средах имеют практическое значение для исследований, связанных с прогнозом распространения загрязнений, фильтрацией вблизи речных плотин, водохранилищ и других гидротехнических сооружений, дренажом фундаментов и подвалов зданий, ирригацией и дренажом сельскохозяйственных полей, водоснабжением и нефтегазодобычей, движением магмы в земной коре и т.д. Рассматривается математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде, в которой преобладают упругие свойства деформации относительно вязких, т. е. при большом коэффициенте динамической вязкости среды. Для описания процесса используются законы сохранения масс для жидкой и твердой фаз, закон Дарси для жидкости, учитывающий движение скелета, реологический закон типа Максвелла и уравнение сохранения импульса системы в целом. Система уравнений при переходе к переменным Лагранжа сводится к вырождающемуся на решении параболическому уравнению для пористости. Методом интегральных энергетических оценок в данной работе устанавливается свойство конечной скорости стабилизации решения при малом коэффициенте объемной сжимаемости твердой среды.

Ключевые слова: фильтрация, пороупругость, переменные Лагранжа, конечное время стабилизации.

Problems of filtration in porous media are of practical importance for studies related to forecasting of pollutants distribution, filtration near the river dams, reservoirs and other hydraulic structures, drainage of footings and basements of buildings, irrigation and drainage of agricultural fields, water, oil and gas production, movement of magma in the crust, etc. The paper investigates the mathematical model of fluid filtration in poroelastic media with predominant elastic properties of deformation, i.e., with high values of medium dynamic viscosity coefficient. The filtration process is defined by the mass conservation laws for fluid and solid phases, Darcy's law with skeleton movement, the rheological Maxwell law, and the equation of momentum conservation for the system as a whole. Passing to Lagrange variables reduces a system of equations to a parabolic equation for porosity with a degenerate solution. Finite time stabilization of the solution is established by the method of integral energy estimates for low values of volume compressibility coefficient of a solid medium.

Key words: filtration, poroelasticity, Lagrange variables, finite time stabilization.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-28

1. Постановка задачи. Фильтрация жидкости в деформируемой пористой среде описывается системой уравнений [1–6]

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + div((1-\phi)\vec{v_s}) = 0,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + div(\phi\vec{v_f}) = 0,$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -K(\phi)(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}),$$

$$\frac{1}{1-\phi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{v}_s\cdot\nabla\phi\right) =$$

$$= -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s\cdot\nabla p_e\right),$$

$$\rho\vec{g} - \nabla p_{tot} = 0,$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №2014/2 и гранта РФФИ №13-08-01097.

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s,$$
$$p_e = (1-\phi)(p_s - p_f), \rho = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s.$$

Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_s, \vec{v}_f$ — соответственно, истинные плотности и скорости фаз; ϕ — пористость ($0 \le \le \phi < 1$); $\vec{g} = (0,0,-g)$ — плотность массовых сил; k — проницаемость, μ — динамическая вязкость жидкости; η, β_ϕ, b, m — параметры пороупругой среды; p_{tot} — общее давление; ρ — средняя плотность среды. Задача записана в эйлеровых координатах (x_1, x_2, x_3), t.

В работе исследуется среда со следующими характеристиками:

$$K(\phi) = \frac{k\phi^n}{\mu}, a_1(\phi) = \frac{\phi^l}{\eta}, a_2(\phi) = \phi^b\beta_\phi,$$

где k — проницаемость; μ — динамическая вязкость жидкости; b, l — параметры пороупругой среды; β_ϕ — коэффициент объемной сжимаемости твердой среды; η — коэффициент динамической вязкости твердой среды. В данной работе предполагается, что параметр $\frac{1}{\eta}$ мал и вязкой составляющей напряжения можно пренебречь.

В этом случае исходная система принимает вид

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + div((1-\phi)\rho_s\vec{v_s}) = 0,$$
$$\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + div(\rho_f\phi\vec{v_f}) = 0, \qquad (1)$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{k\phi^n}{\mu}(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}), \qquad (2)$$

$$\nabla\cdot\vec{v}_s = -\phi^b\beta_\phi\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s\cdot\nabla p_e\right), \qquad (3)$$

$$\nabla p_{tot} = \rho\vec{g}, \qquad (4)$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, \;\; p_e = (1-\phi)(p_s - p_f),$$
$$\rho = \rho_f\phi + \rho_s(1-\phi). \qquad (5)$$

Данная квазилинейная система описывает пространственное нестационарное изотермическое движение сжимаемой жидкости в пороупругой среде, в которой преобладают упругие свойства относительно свойств вязкости.

Истинные плотности жидкости и твердой среды ρ_f, ρ_s принимаются постоянными. Искомыми являются величины ϕ, $\vec{v}_s$, $\vec{v}_f$, p_f, p_s.

Ранее для этой модели была установлена локальная разрешимость [7], исследовано автомодельное решение [8] в случае постоянства общего давления.

Следуя [1], преобразуем систему (1)–(5). Пусть $\bar{x} = \bar{x}(\tau, x, t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial\tau} = v_s(\bar{x}, \tau), \quad \bar{x}\mid_{\tau=t} = x.$$

Положим $\hat{x} = \bar{x}(0; x, t)$ и возьмем за новые переменные $\hat{x}$ и t. Тогда $1 - \phi(\hat{x}, t) = (1 - \phi^0(\hat{x}))\hat{J}(\hat{x}, t)$, где $\hat{J}(\hat{x}, t) = \frac{\partial\hat{x}}{\partial x}(\hat{x}, t)$ — якобиан перехода; $\phi^0(x) = = \phi|_{t=0}$. Вместо (1)–(5) имеем

$$\frac{\partial(1-\hat{\phi})}{\partial t} + \frac{(1-\hat{\phi})^2}{1-\phi^0}\frac{\partial\hat{v}_s}{\partial\hat{x}} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\rho}_f\hat{\phi}) + \frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(\hat{\rho}_f\hat{\phi}\hat{v}_f) =$$
$$= v_s\frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(\hat{\rho}_f\hat{\phi}),$$

$$\hat{\phi}(\hat{v}_s - \hat{v}_f) = -\frac{k\hat{\phi}^n}{\mu}(\frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial\hat{p}_f}{\partial\hat{x}} - \hat{\rho}_f\hat{g}),$$

$$\frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial\hat{v}_s}{\partial\hat{x}} = -\hat{\phi}^b\beta_\phi(\hat{\phi})\frac{\partial\hat{p}_e}{\partial t},$$

$$\frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial\hat{p}_{tot}}{\partial\hat{x}} = -\hat{\rho}\hat{g}.$$

Поскольку

$$v_s\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(\hat{\rho}_f\hat{\phi}) = \frac{\partial}{\partial\hat{x}}(\hat{\rho}_f\hat{\phi}v_s) - \hat{\rho}_f\hat{\phi}\frac{\partial v_s}{\partial\hat{x}},$$

то уравнение неразрывности для жидкой фазы можно привести к виду

$$\frac{1}{(1-\hat{\phi})}\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\rho}_f\hat{\phi}) + \frac{1}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(\hat{\rho}_f\hat{\phi}(\hat{v}_f - v_s)) +$$
$$+ \frac{1}{1-\phi^0}\hat{\rho}_f\hat{\phi}\frac{\partial v_s}{\partial\hat{x}} = 0.$$

Используя уравнение неразрывности для твердой фазы, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\rho}_f\frac{\hat{\phi}}{1-\hat{\phi}}) + \frac{1}{(1-\phi^0)}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(\hat{\rho}_f\hat{\phi}(\hat{v}_f - \hat{v}_s)) = 0.$$

Переходя от $(\hat{x}, t)$ к массовым переменным Лагранжа (y, t) по правилу

$$(1-\phi^0(\hat{x}))d\hat{x} = dy, \quad y(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}}(1-\phi^0(\eta))d\eta \in [0,1]$$

и формально заменяя y на x, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi(v_f - v_s)) = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial x} = 0, \qquad (7)$$

$$\phi(v_s - v_f) = \frac{k}{\mu}\phi^n\left((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g\right), \qquad (8)$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\phi^b\beta_\phi\frac{\partial p_e}{\partial t}, \qquad (9)$$

$$(1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho g. \qquad (10)$$

Далее из (7) и (9) уравнений выводим

$$-\frac{1}{\beta_\phi}\frac{\partial G(\phi)}{\partial t} = \frac{\partial p_e}{\partial t},$$

где $G(\phi)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial G(\phi)}{\partial \phi} = \frac{\phi^{-b}}{1-\phi}.$$

После интегрирования по t получим представление для p_e

$$p_e = -\frac{1}{\beta_\phi}G(\phi) + \frac{1}{\beta_\phi}G(\phi^0) + p_e^0, \;\; p_e^0 = p_e|_{t=0}. \qquad (11)$$

Из уравнений (6) и (8) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\mu}\phi^n((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g)\right).$$

С учетом равенства $p_f = p_{tot} - p_e$ и уравнений (6), (10), (11) выводим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) = \frac{k}{\mu\beta_\phi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi^n(1-\phi)\frac{\partial G(\phi)}{\partial x}\right) -$$

$$-\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\phi^n(1-\phi)(\frac{\partial(1/\beta_\phi G(\phi^0)+p_e^0)}{\partial x} + \rho_s g) +$$

$$+\phi^n(1+\phi)\rho_f g\Bigg).$$

В дальнейшем вместо ϕ удобно ввести новую искомую функцию $s = \dfrac{\phi}{1-\phi}$.

Таким образом, рассматриваем уравнение

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A(s)\frac{\partial s}{\partial x} + D(s)\right), \qquad (12)$$

где

$$A(s) = \frac{k}{\mu\beta_\phi}s^{n-b}(1+s)^{-n+b-2},$$

$$D(s) = -\tfrac{k}{\mu}\Bigg(s^n(1+s)^{-n-1}\Bigg(\tfrac{\partial(1/\beta_\phi G(\phi^0)+p_e^0)}{\partial x} +$$

$$+\rho_s g + (1+2s)\rho_f g\Bigg)\Bigg).$$

Здесь предполагается, что

$$\begin{cases} 0 < n \le b \le n+2, \\ n+b \ge 2. \end{cases}$$

$$\exists\delta : \left|\tfrac{\partial(p_e^0 + 1/\beta_\phi G(\phi^0))}{\partial x}\right| \le \delta \text{ равномерно по } \beta_\phi, \qquad (13)$$

почти всюду в Ω

$$0 \le s \le M. \qquad (14)$$

Кроме того,

$$\beta_\phi < \tfrac{4}{(n-b+2)LnM^{b-1}(mes\Omega)^{(b-n)/4}\beta^{1/\alpha}(1+M)^{n-b+2}},$$

$$\text{где } L = \delta + \rho_s g + \rho_f g(1+2M), \;\; \beta = \left(\tfrac{3}{2}\right)^\alpha,$$

$$\alpha = (\tfrac{1}{r} - \tfrac{n-b+2}{4})(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{r})^{-1}, \;\; r \ge 1. \qquad (15)$$

Близость p_e^0 и G^0 к постоянным величинам, а также малость коэффициента объемной сжимаемости твердой среды гарантируют эти условия. Модель рассматривается для случая большого коэффициента динамической вязкости твердой среды. В приложениях эти коэффициенты имеют порядок: $\beta_\phi \approx 10^{-8}\text{Па}^{-1}, \eta \approx 10^{20} - 10^{24}\text{Па}\cdot\text{с}$ [9].

Рассмотрим для уравнения (12) в области $(x,t) \in Q = \Omega \times (0,T)$ следующую начально-краевую задачу:

$$s(x,0) = s_0(x), x \in \Omega; s|_{\partial\Omega} = 0, t \in (0,T). \qquad (16)$$

Условие $s|_{\partial\Omega} = 0$ означает равенство общего давления и давления твердой фазы на границе.

Решение задачи (12)–(16) понимается в обобщенном смысле.

Рассмотрим на Ω и Ω_T ряд функциональных пространств, придерживаясь обозначений, принятых в [10]. Пусть $||\cdot||_{q,\Omega}$ — норма в пространстве Лебега $L_q(\Omega)$, $q \in [1,\infty]$. Положим для краткости $||\cdot||_q = ||\cdot||_{q,\Omega}$, $||\cdot|| = ||\cdot||_{2,\Omega}$. Также используются пространства Гельдера $C^\alpha(\Omega)$, $C^{k+\alpha}(\Omega)$, где k — натуральное, $\alpha \in (0,1]$, и пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$, где l натуральное, $p \in [1,\infty]$, с нормами

$||f||_{C^\alpha(\Omega)} \equiv |f|_{\alpha,\Omega} = |f|_{0,\Omega} + H_x^\alpha(f)$, $|f|_{0,\Omega} = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}}|f(x)|$,

$H_x^\alpha(f) = \sup\limits_{x_1,x_2\in\Omega}|f(x_1) - f(x_2)||x_1 - x_2|^{-\alpha}$,

$||f||_{C^{k+\alpha}(\Omega)} \equiv |f|_{k+\alpha,\Omega} = \sum\limits_{m=0}^{k}||D_x^m f||_{0,\Omega} + H^\alpha(D_x^k f)$,

$||f||_{W_p^l(\Omega)} = \sum\limits_{m=0}^{l}||D_x^m f||_{p,\Omega}$.

$\overset{o}{W}{}_q^l(\Omega)$ – множество элементов $W_q^l(\Omega)$, финитных в Ω.

Для функций, определенных на Ω_T, нам потребуется пространство $L_{q,r}(\Omega_T)$ с нормой

$||||\cdot||_{q,\Omega}||_{r,G}$, $G = (0,T)$, $q,r \in [1,\infty]$,

пространство $L_r(0,T;W_p^l(\Omega))$ с нормой

$||\cdot||_{L_r(0,T;W_p^l(\Omega))} = ||||\cdot||_{W_p^l(\Omega)}||_{r,G}$,

Определение. Неотрицательная ограниченная измеримая функция $s(x,t)$ $(0 \le s(x,t) \le M)$ определенная в $\Omega \times (0,\infty)$ есть слабое решение задачи (12)–(16), если для $\forall T > 0$ и любого открытого подмножества $\Omega \subset R^1$ выполняются следующие предположения:

$$s \in L_\infty(0,T,W_2^1(\Omega)),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(s^{n-b+1}\right) \in L_2[(0,T)\times\Omega],$$

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_\Omega s dx = \int\limits_\Omega s_0 dx$$

и для $\forall \varphi(x,t) \in \overset{o}{C}{}^\infty((0,T)\times\Omega)$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega \left[A(s)\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial x}\,\varphi\right] dx\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega s\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt + \int\limits_\Omega s(x,0)\,\varphi(x,0)\,dx.$$

2. Конечная скорость стабилизации решения. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть s — обобщенное решение задачи (12), (16) и выполнены условия (13)–(15). Тогда существует конечное время t_0 такое, что $s(x,t) = 0, x \in \Omega, t \geq t_0$.

Доказательство.

Для $s(x,t)$ в силу (12), (16) аналогично [11–13] легко устанавливается неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega s^2dx + \int\limits_\Omega a(s)(\frac{\partial s}{\partial x})^2dx \leq \int\limits_\Omega d'(s)\frac{\partial s}{\partial x}sdx,$$

где $a(s) = \frac{k}{\mu\beta_\phi}(1+M)^{b-n-2}s^{n-b}, \quad d(s) = \frac{k}{\mu}s^nL$.

Оценим правую часть, используя неравенство Гельдера и Юнга

$$\int\limits_\Omega d'(s)\frac{\partial s}{\partial x}sdx =$$

$$\leq \left(\int\limits_\Omega a(s)(\frac{\partial s}{\partial x})^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega \frac{s^2(d'(s))^2}{a(s)}dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_\Omega a(s)(\frac{\partial s}{\partial x})^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \frac{s^2(d'(s))^2}{a(s)}dx.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega s^2dx + \int\limits_\Omega a(s)(\frac{\partial s}{\partial x})^2dx \leq \int\limits_\Omega \frac{s^2(d'(s))^2}{a(s)}dx. \tag{17}$$

Далее оценим правую часть (17)

$$\int\limits_\Omega \frac{s^2(d'(s))^2}{a(s)}dx \leq C_1\int\limits_\Omega s^2dx \leq$$

$$\leq C_1(\int\limits_\Omega s^2dx)^{\frac{n-b+2}{2}}(\int\limits_\Omega s^2dx)^{(b-n)/2} \leq$$

$$\leq C_1(\int\limits_\Omega s^2dx)^{\frac{n-b+2}{2}}(M^2mes\Omega)^{(b-n)/2} =$$

$$= C_2(\int\limits_\Omega s^2dx)^{\frac{n-b+2}{2}},$$

где $C_1 = \frac{k\beta_\phi}{\mu}(Ln)^2M^{n+b-2}(1+M)^{n-b+2}$, $C_2 = C_1M^{b-n}(mes\Omega)^{(b-n)/2}$.

Для оценки второго слагаемого из левой части (17) воспользуемся интерполяционным неравенством [10]

$$||u||_{q,\Omega} \leq \beta||u_x||^\alpha_{m,\Omega}||u||^{1-\alpha}_{r,\Omega},$$

$$u \in \overset{o}{W}{}^1_m, q\in[r,\infty), \alpha = (\frac{1}{r}-\frac{1}{q})(1-\frac{1}{m}+\frac{1}{r})^{-1},$$

$$\beta = (1+\frac{m-1}{m}r)^\alpha, m\geq 1, r\geq 1.$$

Так как $r \leq q$, то

$$||u||_{q,\Omega} \leq \beta||u_x||^\alpha_{m,\Omega}||u||^{1-\alpha}_{q,\Omega},$$

и, следовательно,

$$||u||_{q,\Omega} \leq \beta^{1/\alpha}||u_x||_{m,\Omega}.$$

В качестве u возьмем $s^{(n-b+2)/2}$ и выберем $m = 2$, получим

$$\left(\int\limits_\Omega s^{(n-b+2)q/2}dx\right)^{1/q} \leq \beta^{1/\alpha}||\frac{\partial s^{(n-b+2)/2}}{\partial x}||_{2,\Omega}.$$

Выберем $q = \dfrac{4}{n-b+2}$:

$$\left(\int\limits_\Omega s^2dx\right)^{(n-b+2)/4} \leq$$

$$\leq \frac{n-b+2}{2}\beta^{1/\alpha}\left(\int\limits_\Omega s^{n-b}(\frac{\partial s}{\partial x})^2dx\right)^{1/2}.$$

Таким образом, неравенство (17) перепишется в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega s^2dx + C_3\left(\int\limits_\Omega s^2dx\right)^{\frac{n-b+2}{2}} \leq$$

$$\leq C_2\left(\int\limits_\Omega s^2dx\right)^{(n-b+2)/2},$$

где $C_3 = \frac{4k}{\mu\beta_\phi(n-b+2)^2\beta^{2/\alpha}(1+M)^{n-b+2}}$.

Таким образом, имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} s^2 dx + (C_3 - C_2)\left(\int\limits_{\Omega} s^2 dx\right)^{\frac{n-b+2}{2}} \leq 0,$$

где $C_4 = C_3 - C_2 > 0$ в силу (15)

Далее, полагая $y = \int\limits_{\Omega} s^2 dx$, имеем

$$y' + C_4 y^{\frac{n-b+2}{2}} \leq 0.$$

Интегрирование последнего от 0 до t приводит к неравенству

$$\frac{2}{b-n}(y^{\frac{b-n}{2}}(t) - y^{\frac{b-n}{2}}(0)) + C_4 t \leq 0.$$

из которого выводим

$$0 \leq y \leq (-\frac{b-n}{2}C_4 t + y^{(b-n)/2}(0))^{2/(b-n)}.$$

Следовательно, при

$$t > t_0 = \frac{2}{(b-n)C_4} y^{(b-n)/2}(0)$$

имеем $y(t) = ||s||^2_{2,\Omega} \equiv 0$.

Теорема доказана.

Заключение. В работе рассмотрена математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде при большом коэффициенте динамической вязкости и малом коэффициенте объемной сжимаемости твердой среды. Методом локальных энергетических оценок доказывается стабилизация за конечное время. Автор признателен А.А. Папину за конструктивное обсуждение результатов.

Библиографический список

1. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск, 1983.

2. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. — New York, 1972.

3. Fowler A.C., Yang X. Pressure solution and viscous compaction in sedimentary basins // J. Geophys. Res., 104, 12,989–12,997, 1999.

4. Fowler A.C. A compaction model for melt transport in the Earth's asthenosphere, part 1, the basic model, in Magma Transport and Storage, edited by M.P. Ryan, pp. 3-14, Jhon Wiley. — New York, 1990.

5. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. — 1998.

6. Morency C., Huismans R. S., Beaumont C., Fullsack P. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Research. — 2007. — Vol. 112.

7. Папин А.А., Токарева М.А. Задача о движении сжимаемой жидкости в деформируемой горной породе // Известия Алт. гос. ун-та. — 2011. — № 1/2 (72).

8. Папин А.А., Токарева М.А. Динамика тающего деформируемого снежно-ледового покрова // Вестник НГУ. — Серия: Математика, механика, информатика. — 2012. — № 4.

9. Connolly J.A.D., Podladchikov Yu.Yu. Temperature-dependent viscoelastic compaction and compartmentalization in sedimentary basins // Tectonophysics. — 324 (2000).

10. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М., 1967.

11. Антонцев С.Н. О характере возмущений, описываемых решениями многомерных вырождающихся параболических уравнений // Динамика сплошной среды. — Новосибирск, 1979. — Вып. 40.

12. Favini A., Marinoschi G. Degenerate Nonlinear Diffusion Equations. Springer. — 2012.

13. DiBenedetto E. Degenerate Parabolic Equations. Springer-Verlag. — 1993.