

Численный метод расчета стационарных конвективных течений жидкости в области со свободной границей

Т.В. Протопопова

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения
Российской академии наук (Новосибирск, Россия)

A Numerical Method for Calculation of Stationary Convective Liquid Flow with a Free Boundary

T.V. Protopopova

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian
Academy of Sciences (Novosibirsk, Russia)

Рассматривается вопрос численного решения задачи о конвективном течении вязкой жидкости в двумерной области со свободной границей. С точки зрения численного моделирования присутствие свободной границы ставит большую проблему, так как положение границы заранее неизвестно и нуждается в определении как при решении нестационарных задач, так и в стационарном случае. Сегодня для исследования таких задач применяются разнообразные численные методы. Рассмотрен метод конечных разностей, при этом исходная задача формулируется в терминах «вихрь — функция тока». Такой подход имеет ряд преимуществ при рассмотрении двумерных течений, так как в этом случае уравнение неразрывности выполняется точно, что особенно важно, когда нет оттока или притока жидкости в рассматриваемую область. Однако в случае использования функции тока и вихря значительно усложняется вид граничных условий на свободной поверхности, что затрудняет построение эффективных алгоритмов расчета. В работе предлагается метод, в котором свободная граница находится путем решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с нелокальным условием. Проведены тестовые расчеты, демонстрирующие эффективность предлагаемого метода.

Ключевые слова: уравнения конвекции, свободная граница, конечно-разностный метод.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-27

Математическая формулировка задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость с плотностью ρ , кинематической вязкостью ν и коэффициентом поверхностного натяжения σ (считается, что поверхностное натяжение линейным образом зависит от температуры [1]) занимает область, ограниченную твердыми

In this paper, we investigate a numerical solution of the problem of viscous fluid convective flow in a two-dimensional region with a free surface. The presence of a free surface poses a big problem for the numerical simulation since the surface position is unknown. It is necessary to determine the interface position both for the non-stationary problem and for the stationary case. The various numerical methods are used nowadays for solving such problems. We use the finite difference method and formulate the problem in terms of eddy-current variables. This approach has several advantages when we consider a two-dimensional flow because, in this case, the continuity equation is fulfilled exactly. This is especially important when there is no outflow or inflow of liquid in the fluid flow domain. However, in the case of stream function and vorticity the form of the boundary conditions on the free surface is much more complicated. It is difficult to construct the efficient numerical algorithms. We propose the method, in which the free boundary is found by solving the boundary value problem for the ordinary differential equations of third order with nonlocal condition. The test calculations are carried out. The results demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: convection equations, free surface, finite-difference method.

непроницаемыми стенками $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ и неизвестной свободной границей $z = f(x)$ (рис. 1). Будем рассматривать ситуацию, когда градиент температуры в объеме жидкости может привести к возникновению естественной конвекции (гравитационной или термокапиллярной, или их комбинации). Движение жид-

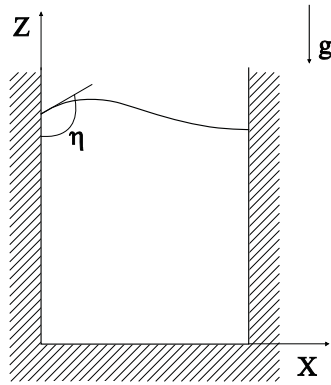


Рис. 1. Область течения жидкости

кости и теплообмен описываются системой уравнений Обербека-Буссинеска, которую в переменных вихрь — функция тока можно записать в следующей безразмерной форме [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} &= \Delta \omega + Gr \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \Delta \psi + \omega &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{1}{Pr} \Delta T. \end{aligned}$$

Здесь $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$ — оператор Лапласа. Искомыми величинами являются вихрь скорости $\omega = \partial w / \partial x - \partial u / \partial z$ (u, w — компоненты вектора скорости в направлениях осей декартовой системы координат x, z), функция тока ψ ($\partial \psi / \partial z = u, \partial \psi / \partial x = -w$), температура T (точнее, отклонение последней от статического значения). Все искомые функции являются функциями пространственных координат и времени t . Ось z направлена вверх против вектора силы тяжести $\vec{g} = (0, -g)$. Система содержит безразмерные параметры: $Gr = g\beta\delta TL^3 / \nu^2$ — число Грасгофа и $Pr = \nu / \chi$ — число Прандтля, где β — коэффициент теплового расширения жидкости; χ — коэффициент теплопроводности; δT — характерная разность температур; L — характерный размер в направлении x . Параметры среды ν, β, χ считаются постоянными.

Сделаем некоторые упрощения, а именно будем предполагать, что течение жидкости описывается стационарными линейными уравнениями конвекции:

$$\Delta \omega + Gr \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \Delta \psi + \omega = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{Pr} \Delta T = 0. \quad (2)$$

Решение системы (1)–(2) однозначно определяется заданием граничных (краевых) условий. Считается, что на твердых стенках заданы условия прилипания и непротекания:

$$\psi|_{\Gamma} = \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\Gamma} = 0. \quad (3)$$

Здесь Γ — соответствующая часть границы области; $\partial / \partial n$ — производная по нормали к границе (рассматривается единичный внешний по отношению к области, занятой жидкостью, вектор нормали). Следуя методике, предложенной В.В. Пухначевым [1], условия на свободной границе записываются в терминах «вихрь — функция тока». Кинематическое условие на свободной границе, в предположении, что граница стационарна, запишется в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0, \quad (4)$$

где $\partial / \partial s$ — производная по касательной к свободной границе. Динамическое условие в предположении, что давление газа равно нулю и $f' < 1$, так что $(f')^2 \ll 1$, можно записать следующим образом [3]:

$$\omega = 2f'' \frac{\partial \psi}{\partial n} + Ma \frac{\partial T}{\partial s}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{Ca} - MaT \right) f''' - Ma \frac{\partial T}{\partial s} f'' + \\ + \left(GrT + \frac{1}{Fr^2} \right) f' - \frac{\partial \omega}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Условия (5), (6) содержат безразмерные параметры: $Ma = \kappa \sigma_0 \delta TL / \rho v^2$ — число Марангони; Fr — число Фруда ($Fr^2 = v^2 / gL^3$); $Ca = \rho_0 v^2 / \sigma_0 L$ — капиллярное число. Здесь σ_0 — поверхностное натяжение, соответствующее статическому значению температуры; κ — температурный коэффициент поверхностного натяжения. Отметим, что «термодинамическое условие устойчивости границы раздела» влечет положительность величины σ [1], отсюда $(1/Ca - MaT) > 0$.

Граничные условия для температуры могут быть трех основных типов: заданы распределение температуры T , поток тепла, закон теплообмена.

В задаче считается, что угол смачивания жидкостью твердой поверхности η известен, кроме того, объем жидкости остается постоянным, т. е.

$$\int_0^1 f(x) dx = V_0, \quad (7)$$

где V_0 — это безразмерный объем.

Отметим, что на свободной поверхности имеется три граничных условия (4)–(6). Только два граничных условия нужны для замыкания уравнений движения (1), поэтому два из трех граничных условий используются при решении уравнений движения, а оставшееся — для построения итерационной процедуры по определению устойчивого положения свободной

поверхности. Обычно для этого используют кинематическое условие (4) [4–6]. В настоящей работе положение свободной границы определяется из условия непрерывности нормальной составляющей тензора напряжений (6). Для этого решается обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с нелокальным условием (7). Такой подход предложен в работе автора [3], а также использован в работе [7] для решения изотермической задачи с динамическим контактным углом.

Разностная краевая задача. Способ формулировки граничных условий на свободной границе в виде (4)–(6) позволяет использовать для решения задачи любые численные методы, применяемые для задач о течении вязкой несжимаемой жидкости в замкнутых нерегулярных областях в переменных вихрь — функция тока. Используем подход, суть которого заключается в отображении области со сложной конфигурацией в некоторую область с границами, проходящими по координатным линиям. Для этого отобразим исходную область в квадрат ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$) с помощью преобразования $x = x$, $z = f(x)\xi$. Уравнения системы (1)–(2) одного типа (эллиптические), и после преобразования каждое из них может быть записано в следующем виде [6]:

$$\frac{1}{B} \frac{1}{f} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(B_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \right] + Q = 0, \quad (8)$$

где $B = 1$, $Q = Gr \left[\frac{\partial T}{\partial x} - \xi \left(\frac{f'}{f} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right]$, если $\Phi = \omega$; $B = 1$, $Q = \omega$, если $\Phi = \psi$; $B = Pr$, $Q = 0$, если $\Phi = T$; $B_{11} = f(x)$; $B_{12} = -f'(x)\xi$; $B_{22} = (1 + f'^2(x)\xi^2) / f(x)$. Граничные условия для функции тока и вихря примут вид:

$$\text{на твердых стенках } \psi|_{\xi=0} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \psi|_{x=0, x=1} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = 0.$$

на свободной границе ($\xi = 1$)

$$\psi = 0, \quad (9)$$

$$\omega = \frac{2f''}{f} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + Ma \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (10)$$

$$-\alpha \phi'' + 2\gamma \phi' - \beta \phi = F, \quad \phi = f', \quad (11)$$

где

$$\alpha = f^2 \left(\frac{1}{Ca} - MaT \right),$$

$$\beta = f^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + GrT + \frac{1}{Fr^2} \right) - 4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right),$$

$$\gamma = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{1}{2} Ma f^2 \frac{\partial T}{\partial x}, \quad F = f \left[2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right].$$

Переписываются в новых переменных и граничные условия для температуры.

Решение каждого из уравнений вида (8) находится методом установления с помощью схемы стабилизирующей поправки, подобно тому, как это сделано в работе [6]. Схема стабилизирующей поправки относится к классу экономичных разностных схем с дробными шагами, где первый шаг дает полную аппроксимацию уравнения, а следующий является поправочным и служит цели улучшения устойчивости. Для реализации схемы в квадрате строится прямоугольная сетка с шагом h_1 по оси x и шагом h_3 по оси ξ :

$$G_h = \{x_i = ih_1, \xi_k = kh_3, i = 0, \dots, I, k = 0, \dots, K\}.$$

Дифференциальные выражения вида $(B_{11}\Phi_x)_x$, $(B_{22}\Phi_\xi)_\xi$, $(B_{12}\Phi_x)_\xi$ аппроксимируются со вторым порядком точности конечно-разностными аналогами. После замены производных соответствующими конечными разностями на каждом дробном шаге для всех внутренних точек получим систему линейных разностных уравнений относительно сеточной функции Φ_{ik} . Матрица системы имеет трехдиагональную структуру с диагональным преобладанием, следовательно, может быть решена методом прогонки с учетом граничных условий.

Общий алгоритм решения задачи. Алгоритм решения задачи состоит из следующих этапов.

1. Задаются нулевые приближения для уравнения свободной границы, распределения температуры, функции тока и вихря, которые соответствуют некоторому приближению к стационарному решению.

2. По известным приближениям температуры T_{ik}^r и уравнения свободной границы f_i^r (индекс r означает номер итерации) определяется поле температуры следующего приближения T_{ik}^{r+1} . Итерационный процесс с начальным условием $T_{ik}^0 = T_{ik}^r$ считается завершенным при достижении следующих критериев установления: выполнено не менее 15 итераций и $\|T_{ik}^{m+1} - T_{ik}^m\| / \|T_{ik}^{m+1}\| \leq \varepsilon_T$, где $\|\cdot\|$ — разностный аналог нормы в сеточном пространстве L_2 , а ε_T — заданная для поля температуры точность. Полагаем $T_{ik}^{r+1} = T_{ik}^{m+1}$.

3. Схема расчета уравнений Стокса построена стандартным образом [8]: двухполевой метод. Условие $\psi = 0$, при $\xi = 0$, $0, x = 1$ используется в качестве граничного условия для функции тока, а вихрь скорости на твердых стенках определяется с помощью формулы Тома. На свободной границе для функции тока используется условие (9), а для вихря — аппроксимация условия (10). Итерационные процессы для вихря скорости и функции тока прекращаются при достижении условий, аналогичных условиям установления для температуры.

4. Вычисляется новое приближение положения свободной границы. Заменяя ϕ'', ϕ' в уравнении (10) конечными разностями, можно записать следующее разностное уравнение второго порядка:

$$-(\alpha - h_1 \gamma)_i \phi_{i+1}^{r+1} + (2\alpha - h_1^2 \bar{\beta})_i \phi_i^{r+1} - (\alpha + h_1 \gamma)_i \phi_{i-1}^{r+1} = h_1^2 (F + \bar{\beta} \phi^r)_i, \quad (i = 1, \dots, I-1),$$

где $\bar{\beta} = (\beta - |\beta|)/2$, $\bar{\beta} = (\beta + |\beta|)/2$. Считается, что шаг h_1 выбран таким образом, что $(\alpha - h_1 |\gamma|)_i > 0$ для любого значения индекса $i = 1, \dots, I-1$. Так как угол смачивания известен, то, используя краевые условия $\phi(0) = tg(\eta - \pi/2)$, $\phi(1) = -tg(\eta - \pi/2)$, можно решить уравнение для ϕ_i^{r+1} методом прогонки. Выбор шага h_1 и введение величин $\bar{\beta}$, $\bar{\beta}$ обеспечивает устойчивость прогонки.

Для восстановления уравнения свободной границы по значениям ϕ воспользуемся определением интеграла, формулой трапеций численного интегрирования и известным значением объема жидкости.

Рассматривая $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x) dx$, получаем следующую рекуррентную формулу:

$$f_i^{r+1} = f_{i-1}^{r+1} + \frac{h_1}{2} (\phi_i^{r+1} + \phi_{i-1}^{r+1}), \quad (i = 1, \dots, I). \quad (12)$$

Для организации вычислений по формуле (11) необходимо знать значение f_0^{r+1} . Для его определения подставим значения f_i^{r+1} , $(i = 1, \dots, I)$ с соответствующими коэффициентами в формулу трапеций для вычисления $\int_0^1 f(x) dx = V_0$. Получаем

$$f_0^{r+1} = V_0 - \frac{h_1^2}{4} [(2I-3)\phi_0^{r+1} + \phi_I^{r+1}] - h_1^2 \sum_{i=1}^{I-1} (I-i)\phi_i^{r+1}.$$

Этапы 2–4 повторяются до выполнения критерия установления для уравнения свободной границы: $\|f_i^{r+1} - f_i^r\| / \|f_i^{r+1}\| \leq \varepsilon_f$, где норма и ε_f определяются аналогично п. 2 алгоритма.

Численные расчеты. Для тестирования предложенного метода рассматривалась задача о течении жидкости в открытой каверне при подогреве сбоку [9, 10]. Угол смачивания жидкостью твердой поверхности η считался равным $\pi/2$, а безразмерный объем — равным 1. Граничные условия для температуры следующие:

$$x = 0: T = 0.5; \quad x = 1: T = -0.5; \\ z = 0: T = 0.5 - x; \quad z = f(x): \frac{\partial T}{\partial n} = 0.$$

Предполагается, что жидкость изначально неподвижна (в покое), задано линейное начальное распределение температуры от горячей стенки к холодной.

Для оценки точности численного метода и выяснения сходимости решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи были проведены вычислительные эксперименты на последовательности сеток для следующего набора безразмерных параметров: $Gr = 0$, $Ma = 50/Pr$, $Pr = 0.73$, $1/Gr = 0$, $Ca = 0.01$. Результаты — максимум модуля скорости, высота свободной поверхности на горячей и холодной стенках — представлены в таблице 1. В качестве начального приближения для свободной границы в расчетах 1–3 использовалась прямая $z = 1$, а в расчете 4 — кривая $z = 1 - 0,5 \cos \pi x$. Итерационные параметры выбирались наилучшими по числу итераций для каждой из сеток, $\varepsilon_T = 0.001$, $\varepsilon_\omega = 0.001$, $\varepsilon_\psi = 0.0001$, $\varepsilon_f = 0.0001$. Результаты расчетов демонстрируют устойчивость алгоритма решения задачи. Экспериментальный порядок сходимости, вычисленный по правилу Рунге, для величины $|\vec{V}|_{\max}$ равен 1.13.

Таблица 1

Тест на последовательности сеток

№	Сетка (I+1)×(K+1)	$ \vec{V} _{\max}$	$f(0)$	$f(1)$
1	17×17	6,05720	0,925	1,063
2	33×33	7,61301	0,922	1,067
3	65×65	8,32227	0,919	1,070
4	33×33	7,59828	0,923	1,066
	[9]	8,85	0,942	1,077

Следующая серия расчетов демонстрирует точность получаемых результатов, в зависимости от значений безразмерных параметров задачи. Все расчеты проведены на сетке 33×33. Результаты представлены в таблице 2. Данные в скобках взяты из работы [10]. На рисунке 2 представлена картина течения (слева — изолинии функции тока, справа — изотермы) для режима, соответствующего термокапиллярной конвекции Марангони (расчет 3 табл. 2). В данной работе (в отличие от [10]) рассматриваются линейные уравнения конвекции, а также предполагается малая деформация свободной поверхности, поэтому хорошее совпадение результатов прослеживается при умеренных (по абсолютной величине) скоростях и малой деформации свободной поверхности.

Заключение. Представленный метод, как и все МКР, является экономичным в плане вычислительных ресурсов, прост в реализации, а также обладает наглядностью процедуры дискретизации. Он относится к методам прямого вычисления свободной границы

Влияние безразмерных параметров на течение жидкости

№	Gr	Ma	Pr	Ca	1/Gr	$ \vec{V} _{\max}$	$f(0)$	$f(1)$
1	2,0	0,0	0,73	1,0	0,0	0,01171(0,0125)	1,020(1,021)	0,970(0,978)
2	14,0	0,0	0,73	1,0	0,0	0,07606(0,0785)	1,104(1,204)	0,878(0,773)
3	0,0	50/0,73	0,73	0,01	0,0	7,61301(8,85)	0,922(0,942)	1,067(1,077)
4	0,0	100/0,73	0,73	0,01	0,0	15,3325(15,0)	0,859(0,849)	1,099(1,219)
5	0,0	50/0,73	0,73	0,0025	0,0	7,42097	0,980	1,019
6	0,0	50/0,73	0,73	0,0001	0,0	5,65022(9,12)	0,999(1,000)	1,001(1,001)
7	0,0	100/0,73	0,73	0,01	10,0	15,36094(15,2)	0,864(0,870)	1,095(1,195)
8	0,0	100/0,73	0,73	0,01	100,0	14,70349	0,975	1,017

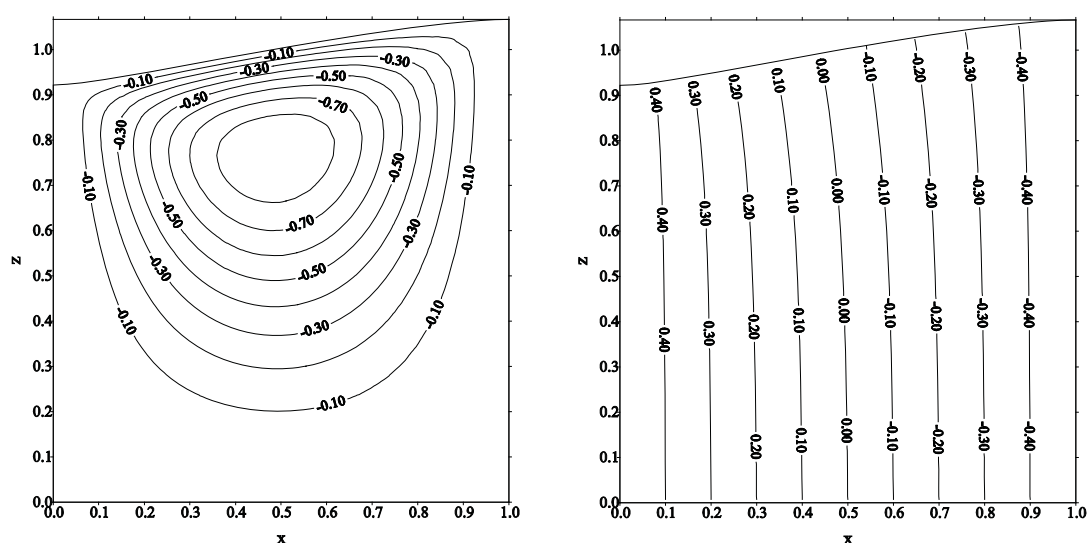


Рис. 2. Термокапиллярная конвекция Марангони (расчет 3)

с точным (в разностном смысле) удовлетворением условий на ней. Граница находится путем решения краевой задачи для уравнения третьего порядка с нелокальным условием. Условие сохранения объема (и как следствие — условие сохранения массы) обеспечено не только использованием переменных вихрь — функция тока, но и заложено в способе нахождения

формы свободной границы. Сравнение с результатами других авторов позволяет делать вывод об эффективности метода для подобного типа задач. Рассмотренный метод может быть обобщен на случай нестационарных нелинейных уравнений конвекции, уравнений микроконвекции, а также для расчета стратифицированных течений в открытых руслах.

Библиографический список

1. Пухначев В.В. Движение вязкой жидкости со свободными границами : учебное пособие. — Новосибирск, 1989.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М., 1972.
3. Протопопова Т.В. Численные методы решения уравнений тепловой конвекции на основе уравнений Навье-

Стокса : автореф. ... дис. канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 2001.

4. Непомнящий А.А., Тарунин Е.Л. Двухполевой метод расчета течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей // Труды VI Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой несжимаемой жидкости. — Новосибирск, 1978.

5. Овчарова А.С. Численное моделирование деформации свободновисящих пленок под действием тепловой нагрузки // Вычислительные технологии. — 2007. — Т. 12, №4.
6. Овчарова А.С. Метод решения термоконвективной задачи в многослойной среде с криволинейными границами раздела // Динамика сплошной среды. — Новосибирск, 1994. — Вып. 106.
7. Dörfler W., Goncharova O., Kröner D. Fluid flow with dynamic contact angle: Numerical simulation // ZAAM. — 2002. — V. 82, №3. DOI: 10.1002/1521-4001(200203)82:3<167::AID-ZAMM167>3.0.CO;2-9.
8. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. — Иркутск, 1990.
9. Chippada S., Jue T.C., Ramaswamy B. Finite element simulation of combined buoyancy and thermocapillary driven convection in open cavities // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1995. — V. 38. DOI: 10.1002/nme.1620380211
10. Cuvelier C., Driessen J.M. Thermocapillary free boundaries in crystal growth // J. Fluid Mech. — 1986. — V. 169. DOI: 10.1017/S0022112086000526.