УДК 512.81

# О сигнатуре оператора тензора кривизны Риччи трехмерных групп Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками*

*С.В. Пастухова, О.П. Хромова*

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

# On the Signature of Ricci Curvature Tensor Operator of Three-Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Lorentzian Metrics

*S.V. Pastukhova, O.P. Khromova*

Altai State University (Barnaul, Russia)

Кривизны левоинвариантных римановых метрик на группах Ли исследовались Дж. Милнором. В случае 3-мерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой были найдены возможные сигнатуры оператора Риччи. Позднее О. Ковальский, С. Никшевич нашли 3-мерные метрические группы Ли, а также 3-мерные римановы локально-однородные пространства с предписанными значениями оператора Риччи. Ю.Г. Никоноровым и А.Г. Кремлевым были определены возможные сигнатуры оператора Риччи на 4-мерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Аналогичные результаты для оператора одномерной кривизны, а также для оператора секционной кривизны получены Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, О.П. Хромовой.

В случае левоинвариантных лоренцевых метрик на группах Ли ситуация представляется менее очевидной. Определены возможные сигнатуры оператора тензора Риччи на 3-мерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. При этом существенно использовались результаты Дж. Кальварусо, Е.Д. Родионова, В.В. Славского, Л.Н. Чибриковой о структуре 3-мерных однородных лоренцевых многообразий.

***Ключевые слова:*** алгебры и группы Ли, левоинвариантные лоренцевы метрики, тензор Риччи.

Curvatures of left-invariant Riemannian metrics on Lie groups were studied by J. Milnor. Possible signatures of the Ricci operator were found for the case of three-dimensional Lie groups with left-invariant Riemannian metric. Further, O. Kowalski and S. Nikcevic found three-dimensional metric Lie groups and three-dimensional Riemannian locally homogeneous spaces with prescribed values of the Ricci operator. Y.G. Nikonorov and A.G. Kremlev identified possible signatures of the Ricci operator on four-dimensional Lie groups with left-invariant Riemannian metric. Similar results for the one-dimensional curvature operator and the sectional curvature operator were obtained by D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov, O.P. Khromova.

In the case of left-invariant Lorentz metrics on Lie groups, the situation is less clear. In this paper, we define the possible signatures of the Ricci tensor operator on three-dimensional Lie group with left-invariant Lorenzian metric. Results of G. Calvaruso, E.D. Rodionov, V.V. Slavskii, L.N. Chibrikova studies on the structure of 3-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds are used in our study.

***Key words:*** Lie algebras and Lie groups, left-invariant Lorentzian metrics, Ricci tensor.

**DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-26**

**1. Основные определения и обозначения.** При исследовании (псевдо)римановых многообразий важную роль играет тензор кривизны Риччи $r$, определяемый формулой (см., например, [1])

$$r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X,V)Y), \qquad (1)$$

где $X, Y, V$ — векторные поля; $R(X,V)Y$ — тензор кривизны Римана; tr — след линейного отображения $V \to R(X,V)Y$.

*Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Тензор Риччи является симметричным, и наряду с ним можно рассматривать оператор Риччи $Ric$, определяемый по правилу

$$r(X,Y) = g(Ric(X),Y),$$

где $g$ — метрический тензор (псевдо)риманова многообразия.

Изучение свойств оператора кривизны Риччи представляет интерес в понимании геометрического и топологического строения однородного (псевдо)риманова многообразия. Поэтому естественно пытаться отыскать общие свойства оператора кривизны Риччи. Один из вариантов — исследовать спектр оператора кривизны Риччи однородного (псевдо)риманова многообразия (см. подробнее [2–4]) и, в частности, его сигнатуры.

В лоренцевом случае оператор $Ric$ может иметь как вещественные, так и комплексные собственные значения. Поэтому задача об исследовании сигнатур корректна лишь для симметрического оператора $\mathtt{R}$, соответствующего матрице тензора Риччи.

В данной работе классифицированы возможные сигнатуры оператора $\mathtt{R}$ на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой.

Напомним, что метрической алгеброй Ли называется пара $(\mathfrak{g}, Q)$ , где $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли, а $Q$ — некоторое лоренцево скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Произвольная левоинвариантная лоренцева метрика $\rho$ на группе Ли $G$ определяет лоренцево скалярное произведение $Q$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$, и наоборот, каждое скалярное лоренцево произведение $Q$ на $\mathfrak{g}$ индуцирует левоинвариантную лоренцеву метрику $\rho$ на группе $G$. Если отождествить элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с левоинвариантными векторными полями на группе Ли $G$, то нетрудно получить в терминах метрической алгебры Ли $(\mathfrak{g}, Q)$ формулы для вычисления основных характеристик кривизны лоренцева многообразия.

Под сигнатурой симметрического оператора $B$, действующего на $n$-мерном евклидовом пространстве, будем понимать упорядоченный набор $(\mathrm{sgn}(\tau_1), \mathrm{sgn}(\tau_2), \ldots, \mathrm{sgn}(\tau_n))$, где $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n$ — собственные значения оператора $B$, и $\mathrm{sgn}(x)$ означает знак (вещественного) числа $x$.

Ввиду того, что проблема определения возможных сигнатур оператора $\mathtt{R}$ левоинвариантных лоренцевых метрик на заданной группе Ли является локальной, то естественно переформулировать ее в терминах метрических алгебр Ли. Именно, определить возможные значения сигнатур оператора $\mathtt{R}$ для всевозможных скалярных произведений на заданной алгебре Ли.

Для упрощения изложения занумеруем все возможные сигнатуры для трехмерного случая так, как это указано в таблице 1.

Таблица 1

Возможные сигнатуры оператора $\mathtt{R}$ на трехмерных группах Ли

| № | Сигнатура | № | Сигнатура |
|---|---|---|---|
| 1 | $(-,-,-)$ | 6 | $(-,+,+)$ |
| 2 | $(-,-,0)$ | 7 | $(0,0,0)$ |
| 3 | $(-,-,+)$ | 8 | $(0,0,+)$ |
| 4 | $(-,0,0)$ | 9 | $(0,+,+)$ |
| 5 | $(-,0,+)$ | 10 | $(+,+,+)$ |

Пусть теперь $G$ — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Заметим, что структурные уравнения алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно записать в виде

$$[e_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} C^{ks} e_s,$$

где $\varepsilon_{ijk}$ — обобщенный символ Кронекера; $\varepsilon_{ijk} = \{\ (-1)^\sigma : \sigma$ — четность подстановки $(ijk)\}$; $C = \|C^{ks}\|$ — некоторая матрица.

**2. Унимодулярный случай.** Пусть $G$ — унимодулярная трехмерная группа Ли, $\|T_{ij}\|$ — произвольный метрический тензор лоренцевой сигнатуры. Тогда характеристическое уравнение

$$\det(T_{ij}C^{kj} - \lambda\delta_i^j) = 0 \tag{2}$$

инвариантно относительно преобразований $A$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ таких, что $\det A = 1$.

**Лемма 1.** *Случай A1. Если все корни уравнения (2) вещественны и различны, то существует базис, в котором коэффициенты $\|C^{kj}\|$ и $\|T_{ij}\|$ составляют диагональные матрицы:*

$$C = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

*Случай A2. Если характеристическое уравнение (2) имеет корни $\lambda_1$ кратности 1 и $\lambda_2$ кратности 2, то существует базис, в котором коэффициенты $||C^{ks}||$ и $||T_{ij}||$ составляют матрицы*

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

*Случай A3. Если уравнение (2) имеет вещественный корень $\lambda$ кратности 3, то существует базис, в котором коэффициенты $||C^{ks}||$ и $||T_{ij}||$ составляют матрицы*

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

*Случай A4. Если характеристическое уравнение (2) имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ и вещественный корень $\lambda_3$, то существует базис, в котором матрицы $C$ и $T$ имеют вид*

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

**Доказательство.** Истинность данной леммы для случаев A1 и A4 установлена в [5]. Покажем справедливость A2.

Отождествим векторное пространство $\mathfrak{g}$ с арифметическим евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$ и соответствующее скалярное произведение обозначим скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Используя это скалярное произведение, отождествим ковариантные и контрвариантные компоненты векторов.

Фиксируем базис $\{E_1, E_2, E_3\}$, в котором коэффициенты $\|T_{ks}\|$ составляют матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть характеристическое уравнение имеет собственные значения $\lambda_1$ кратности 1, $\lambda_2$ кратности 2 и собственные вектора $V_1$, $V_2$ соответственно. В базисе $\{E_1, E_2, E_3\}$ имеем

$$(TC - \lambda_i E)V_i = 0, \ (C - \lambda_i T)V_i = 0, \ V_i \neq 0,$$

где $E$ — единичная матрица; $T^2 = E$.

Рассмотрим присоединенный вектор $V$, отвечающий собственному значению $\lambda_2$ и определяемый равенством $(TC - \lambda_2 E)V = V_2$.

Вектора $\{V_1, V_2, V\}$ линейно независимы и образуют базис $\mathfrak{g}$.

Заметим, что

$$\langle CV_1, V_2 \rangle = \lambda_1 \langle TV_1, V_2 \rangle, \ \langle V_1, CV_2 \rangle = \lambda_2 \langle V_1, TV_2 \rangle,$$
$$\langle CV, V_1 \rangle = \lambda_2 \langle TV, V_1 \rangle, \ \langle V, CV_1 \rangle = \lambda_1 \langle V, TV_1 \rangle,$$

$$\langle CV, V_2 \rangle = \lambda_2 \langle TV, V_2 \rangle + \langle TV_2, V_2 \rangle,$$
$$\langle V, CV_2 \rangle = \lambda_2 \langle V, TV_2 \rangle.$$

Так как матрицы $C$ и $T$ симметричные, отсюда получаем $\langle TV_1, V_2 \rangle = \langle TV, V_1 \rangle = \langle TV_2, V_2 \rangle = 0$.

Тогда в базисе $\{V_1, V_2, V\}$ имеем

$$TC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & d \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Поскольку $T$ определяет лоренцево скалярное произведение, то можно считать $b \neq 0$, $a > 0$. Из (7) заключаем

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\lambda 1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d\lambda 2}{b^2} & -\frac{d}{b^2} + \frac{\lambda 2}{b} \\ 0 & \frac{\lambda 2}{b} & b^{-1} \end{pmatrix}.$$

Возьмем в качестве матрицы перехода к новому базису матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ab^2 - d\sqrt{a}}{2b^2 a^{3/4}} & b^{-1}a^{-1/4} \\ 0 & \frac{-b^2\sqrt{a} - d}{2b^2 a^{1/4}} & b^{-1}a^{-1/4} \end{pmatrix}.$$

В результате получим искомый вид матриц $T$, $C$.

Доказательство случая A3 осуществляется аналогично A2.

**Замечание.** *Результат, аналогичный лемме 1, получен в [6].*

**Замечание.** *Существуют ровно шесть неизоморфных трехмерных алгебр Ли и соответствующих им типов унимодулярных трехмерных групп Ли. Так как в случае действительных корней характеристического многочлена базис, упомянутый выше, отличается от базиса Дж. Милнора [2] знаком $\lambda_1$, то меняются соответствующие знаки. Все трехмерные унимодулярные группы Ли и соответствующие им знаки $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ приведены в таблице 2. В случае же комплексных корней характерестического многочлена при $\lambda_3 = 0$ получим группу $E(1,1)$, иначе — $SL(2,\mathbb{R})$ (см. [5]).*

Из (1) следует, что квадратичная форма $r$ имеет следующий вид: в базисе (3) она диагональна и ее главные значения равны

$$\begin{aligned} 2r_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3), \\ 2r_2 &= (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3), \\ 2r_3 &= (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3); \end{aligned} \qquad (8)$$

в базисе (4) ее главные значения равны

$$\begin{aligned} 2r_1 &= -\lambda_1^2, \\ 2r_{2,3} &= \left(2 \pm \sqrt{4 + \lambda_1^2}\right)(\lambda_1 - 2\lambda_2). \end{aligned} \qquad (9)$$

В базисе (5) характеристический многочлен матрицы оператора $\mathtt{R}$ имеет вид

$$x^3 + \left(4 + \frac{1}{2}\lambda^2\right)x^2 - \frac{1}{4}\lambda^4 x - \frac{1}{8}\lambda^6 = 0, \qquad (10)$$

в базисе (6) ее главные значения квадратичной формы $r$ равны

$$\begin{aligned} 2r_1 &= -4\beta^2 - \lambda_3^2, \\ 2r_2 &= -2r_3 = \sqrt{4\beta^2 + \lambda_3^2}(2\alpha - \lambda_3). \end{aligned} \qquad (11)$$

Таким образом, определение сигнатуры оператора $\mathtt{R}$ трехмерной унимодулярной алгебры Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой сводится к нахождению всевозможных знаков главных значений $r_1$, $r_2$, $r_3$ в зависимости от знаков структурных констант $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\alpha$, $\beta$.

**Лемма 2.** *Пусть $G$ — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, допускающая базис типа (3).*

Таблица 2

Трехмерные унимодулярные группы Ли и соответствующие им алгебры Ли. Вещественный случай

| № | Знаки $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ | Группа Ли | Алгебра Ли |
|---|---|---|---|
| 1 | $(-,+,+)$ | $SU(2)$ или $SO(3)$ | $su(2)$ — компактная, простая |
| 2 | $(+,+,-)$, $(-,-,+)$, $(+,+,+)$ | $SL(2,\mathbb{R})$ или $O(1,2)$ | $sl(2,\mathbb{R})$ — некомпактная, простая |
| 3 | $(-,+,0)$, $(-,0,+)$, $(0,+,+)$ | $E(2)$ | $e(2)$ — разрешимая |
| 4 | $(+,+,0)$, $(+,0,+)$, $(0,+,-)$ | $E(1,1)$ | $e(1,1)$ — разрешимая |
| 5 | $(-,0,0)$, $(0,+,0)$, $(0,0,+)$ | $H$ — группа Гейзенберга | $h$ — нильпотентная |
| 6 | $(0,0,0)$ | $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^3$ — коммутативная |

Таблица 3

Возможные сигнатуры оператора R левоинвариантных лоренцевых метрик на трехмерных унимодулярных группах Ли

| | | № сигнатуры | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Алгебра Ли | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| A1 | $su(2)$ | − | − | + | − | − | − | − | + | − | + |
| | $sl(2,\mathbb{R})$ | − | − | + | + | − | − | − | + | − | + |
| | $e(2)$ | − | − | + | − | − | − | + | + | − | + |
| | $e(1,1)$ | − | − | + | + | − | − | + | − | − | + |
| | $h$ | − | − | + | − | − | − | − | − | − | + |
| | $\mathbb{R}^3$ | − | − | − | − | − | − | + | − | − | − |
| A2 | $sl(2,\mathbb{R})$ | − | − | + | + | − | − | − | − | − | − |
| | $e(1,1)$ | − | − | − | + | − | − | − | + | − | − |
| | $h$ | − | − | − | − | − | − | + | − | − | − |
| A3 | $sl(2,\mathbb{R})$ | − | − | + | − | − | − | − | − | − | − |
| | $e(1,1)$ | − | − | − | + | − | − | − | − | − | − |
| A4 | $sl(2,\mathbb{R})$ | − | − | + | + | − | − | − | − | − | − |
| | $e(1,1)$ | − | − | + | + | − | − | − | − | − | − |

Таблица 4

Возможные сигнатуры оператора R левоинвариантных лоренцевых метрик на трехмерных неунимодулярных группах Ли

| | № сигнатуры | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Алгебра Ли | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| A | − | − | + | − | + | + | − | − | − | − |
| B | − | − | + | + | − | − | + | + | − | − |
| C1 | + | + | + | − | + | + | − | − | − | − |
| C2 | + | + | + | + | + | + | − | + | + | + |

*Тогда оператор* R *на группе* $G$ *не может иметь сигнатуры 1, 2, 5, 6, 9.*

**Доказательство.** Положим $2\mu_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_i$. Тогда (8) примет вид

$$r_1 = -2\mu_1\mu_2,\ r_2 = -2\mu_1\mu_3,\ r_3 = 2\mu_2\mu_3. \qquad (12)$$

Откуда $r_1r_2r_3 = 8\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 \geqslant 0$. То есть $r_1r_2r_3 \geqslant 0$ для любых знаков $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, а значит сигнатуры 1 и 6 не реализуются.

В то же время из (12) очевидным образом вытекает, что одновременно зануляются не менее двух собственных значений. Поэтому сигнатуры 2, 5, 9 не реализуются.

**Лемма 3.** *Пусть* $G$ *— трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, допускающая базис типа (3). Тогда если* $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, *то оператор* R *на группе* $G$ *не может иметь сигнатуру 7.*

**Доказательство.** Пусть оператор R в базисе (3) при $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$ имеет сигнатуру 7.

Тогда $r_1 = (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) = 0$. Отсюда

$$\left[\begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3, \\ &\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_3; \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &r_3 = 4\lambda_2\lambda_3 = 0, \\ &r_2 = -4\lambda_3\lambda_1 = 0; \end{aligned}\right.$$

что противоречит условию $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Следовательно, сигнатура 7 не реализуется.

**Лемма 4.** (Уточненное правило Декарта [7]). *Если все корни многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами вещественны (в частности, это условие выполнено для характеристического многочлена вещественной симметричной матрицы), а его свободный член отличен от нуля, то число положительных корней этого многочлена равно числу перемен знаков в системе его коэффициентов, а число его отрицательных корней равно числу перемен знаков в системе коэффициентов многочлена $P(-x)$.*

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — унимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, $\mathfrak{g}$ — метрическая алгебра Ли группы $G$, $s$ — произвольная сигнатура из таблицы 1. Тогда $s$ реализуется в качестве сигнатуры оператора $\mathtt{R}$ для некоторого лоренцева скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только в том случае, если в таблице 3 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре $s$, находится знак "+".*

**Доказательство. Случай А1**. В таблице 5 приведены значения параметров $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, при которых реализуются сигнатуры, указанные в формулировке теоремы, для алгебр Ли $su(2)$, $sl(2,\mathbb{R})$, $e(2)$, $e(1,1)$. Проверим возможность оставшихся сигнатур для каждой трехмерной унимодулярной алгебры Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, допускающей базис типа (3).

В силу лемм 1 и 2 на алгебре Ли $\mathbf{sl(2,\mathbb{R})}$ остальные сигнатуры не реализуются, а на алгебре $su(2)$ необходимо проверить только сигнатуру 4.

Пусть имеет место сигнатура 4. Тогда $r_1 + r_2 \leqslant 0$. Однако, $r_1 + r_2 = \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) > 0$, т.к. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$. Отсюда получаем противоречие. Следовательно, сигнатура 4 не реализуется.

Ввиду леммы 1 на алгебрах $e(2)$ , $e(1,1)$ сигнатуры 1, 2, 5, 6, 9 невозможны.

В соответствии с таблицей 2 заметим, что на $e(2)$ при $\mathrm{sign}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (-,+,0)$ имеем $r_1 \geqslant 0$, а при $\mathrm{sign}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (-,0,+)$ — $r_2 \geqslant 0$. Следовательно, сигнатура 4 не реализуется при данных знаках $\lambda_i$.

Пусть теперь на $e(2)\mathrm{sign}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,+,+)$. Тогда $r_1 = -r_2 = \frac{1}{2}\lambda_2^2 - \lambda_3^2$, $r_3 = -\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_3)^2 \leqslant 0$. Если сигнатура 4 имеет место, то $r_1 = r_2 = 0$ влечет $\lambda_2^2 = \lambda_3^2$. Откуда, с учетом $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$, получаем $r_3 = 0$, а значит сигнатура 4 не реализуется на $e(2)$.

Таблица 5

Наборы структурных констант алгебр Ли
и соответствующие им сигнатуры оператора $\mathtt{R}$
левоинвариантных лоренцевых метрик

| Алгебра Ли | № | сигнатура | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $su(2)$ | 3 | $(-,-,+)$ | $-1$ | 2 | 1 |
| | 8 | $(0,0,+)$ | $-1$ | 1 | 1 |
| | 10 | $(+,+,+)$ | $-1$ | 1 | $\frac{5}{2}$ |
| $sl(2,\mathbb{R})$ | 3 | $(-,-,+)$ | $-1$ | 1 | $-1$ |
| | 4 | $(-,0,0)$ | $-1$ | 1 | $-2$ |
| | 8 | $(0,0,+)$ | 4 | 1 | 3 |
| | 10 | $(+,+,+)$ | 15 | 1 | 10 |
| $e(2)$ | 3 | $(-,-,+)$ | $-1$ | 20 | 0 |
| | 7 | $(0,0,0)$ | 0 | 1 | 1 |
| | 8 | $(0,0,+)$ | $-1$ | 1 | 0 |
| | 10 | $(+,+,+)$ | $-2$ | 1 | 0 |
| $e(1,1)$ | 3 | $(-,-,+)$ | 1 | 5 | 0 |
| | 4 | $(-,0,0)$ | 0 | $-1$ | 1 |
| | 7 | $(0,0,0)$ | 1 | 1 | 0 |
| | 10 | $(+,+,+)$ | 5 | 1 | 0 |

Аналогичным образом устанавливается невозможность сигнатуры 8 на алгебре Ли $e(1,1)$.

В соответствии с таблицей 2 заметим, что на алгебре Ли $\mathbf{h}$ при $\mathrm{sign}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (-,0,0)$ имеем

$$2r_1 = \lambda_1^2 > 0,\ 2r_2 = \lambda_1^2 > 0,\ 2r_3 = \lambda_1^2 > 0.$$

При $\mathrm{sign}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,+,0)$ выполняется

$$2r_1 = \lambda_2^2 > 0,\ 2r_2 = -\lambda_2^2 < 0,\ 2r_3 = -\lambda_2^2 < 0.$$

При $\mathrm{sign}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,0,+)$ имеем

$$2r_1 = -\lambda_3^2 < 0,\ 2r_2 = \lambda_3^2 > 0,\ 2r_3 = -\lambda_3^2 < 0.$$

Отсюда очевидным образом следует, что на $h$ реализуются только сигнатуры 3 и 10.

Поскольку для $\mathbb{R}^3$ все структурные константы нулевые: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то тривиальным является и оператор $\mathtt{R}$. Таким образом, единственная возможная сигнатура — это $(0,0,0)$.

**Случай А2**. В данном случае главные кривизны Риччи имеют вид (9). Очевидно, если $\lambda_1 = 0$, то реализуются только сигнатуры 4, 7, 8. Пусть далее $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $k_1 < 0$, и следовательно, сигнатуры 9, 10 невозможны. Полагая $\lambda_1 = 2\lambda_2$, получаем реализацию сигнатуры 4.

Считаем, теперь что $\lambda_1 \neq 2\lambda_2$. Тогда произведение корней $k_2k_3 < 0$ показывает, что сигнатуры 1, 2, 5, 6 невозможны. Наконец, при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ имеет место сигнатура 3.

Нетрудно проверить, что полученные в данном случае сигнатуры реализуются на следующих алгебрах Ли: сигнатуры 3 и 4 имеют место на $sl(2,\mathbb{R})$, сигнатуры 4 и 8 — на $e(1,1)$, сигнатура 7 — на $h$.

**Случай A3**. В этом случае характеристический многочлен имеет вид (10). Если $\lambda = 0$, то данный многочлен принимает вид $x^2(4+x) = 0$. Откуда следует, что реализуется сигнатура 4.

Теперь пусть $\lambda \neq 0$. Тогда произведение корней $k_1k_2k_3 = \frac{1}{8}\lambda^6 > 0$, и, значит, сигнатуры 1, 2, 4 – 9 невозможны. Также легко проверить, что при $\lambda = 1$ реализуется сигнатура 3.

Пусть имеет сигнатура 10, тогда по лемме 3 одновременно выполняется: $-\frac{1}{8}\lambda^6 < 0$, $-\frac{1}{4}\lambda^4 > 0$, $\frac{1}{2}\lambda^2 + 4 < 0$, что, доказывает невозможность сигнатуры 10.

Легко заметить, что установленная в случае A3 сигнатура 3 реализуется на алгебре Ли $sl(2,\mathbb{R})$, а сигнатура 4 имеет место на $e(1,1)$.

**Случай A4**. Здесь корни характеристического многочлена имеют вид (11). И поскольку $r_1 < 0$, а $r_2 = -r_3$, то сигнатуры 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10 не реализуются.

Наконец, замечаем, что сигнатура 4 имеет место при $\lambda_3 = 2\alpha$, иначе — сигнатура 3.

**3. Неунимодулярный случай.** Пусть $G$ — трехмерная неунимодулярная группа Ли, $\|T_{ij}\|$ — произвольный метрический тензор лоренцевой сигнатуры. Тогда имеет место (см. [5,6])

**Лемма 5.** *Случай A. Существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$, в котором матрицы $C$ и $T$, соответственно, имеют вид*

$$C = \begin{pmatrix} \lambda\cos\varphi & \mu\sin\varphi & 0 \\ -\lambda\sin\varphi & \mu\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

*где $\varphi \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, $\lambda + \mu \neq 0$ и $\lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0$.*

*Случай B. Существует базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, в котором матрицы $C$ и $T$, соответственно, имеют вид*

$$C = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ t & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

*где $q \neq t$.*

*Случай C. Существует базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, в котором матрицы $C$ и $T$, соответственно, имеют вид либо [подслучай C.1]*

$$C = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

*где $q \neq s$,*

*либо [подслучай C.2]*

$$C = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ -q & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

*где $q \neq 0$ и $p + r \neq 0$.* Рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 1, устанавливается истинность следующего утверждения.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — неунимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, $\mathfrak{g}$ — метрическая алгебра Ли группы $G$, $s$ — произвольная сигнатура из таблицы 1. Тогда $s$ реализуется в качестве сигнатуры оператора $\mathtt{R}$ для некоторого лоренцева скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только в том случае, если в таблице 4 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре $s$, находится знак "+".*

## Библиографический список


1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна : в 2 т. / пер. с англ. — М., 1990.

2. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — V. 21.

3. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedicata. — 1996. — №. 1.

4. Calvaruso G., Kowalski O. On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds // Cent. Eur. J. Math. —2009. — V. 7 (1).

5. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Математические труды. — 2006. — Т. 9 (1).

6. Calvaruso G. Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. — 2007. — V. 57.

7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М., 1968.