УДК 517.927

О разрешимости первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии*

А.А. Папин, А.Н. Сибин

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On Solvability of the First Boundary Value Problem for One-Dimensional Internal Erosion

A.A. Papin, A.N. Sibin

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается математическая модель изотермической внутренней эрозии без учета деформации пористой среды. Фильтрация подземных вод происходит в водоносном горизонте, который соприкасается с промерзшим песчаным грунтом. В процессе оттаивания грунта и при достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения и образование подземных полостей. В результате увеличения и достижения критических размеров этих полостей обрушивается свод многолетнемерзлых пород. В качестве математической модели используются уравнения сохранения массы для воды, подвижных твердых частиц и неподвижного пористого скелета, а также закон Дарси для воды и подвижных твердых частиц (аналог классической модели Маскета-Леверетта) и соотношение для интенсивности суффозионного потока. В пункте 1 дается постановка задачи, приводятся вспомогательные сведения и формулируется теорема об однозначной классической разрешимости. В пункте 2 изложены семь лемм, в том числе установлены физические принципы максимума для насыщенности воды и пористости. Ключевым моментом является доказательство гельдеровской непрерывности насыщенности. Далее проверяются условия теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Ключевые слова: многофазная фильтрация, пористая среда, суффозия, фазовый переход, насыщенность.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-25

This paper deals with a mathematical model of isothermal internal erosion without deformation of a porous medium. Underground water filtration occurs in the aquifer being in contact with frozen sandy soil. During soil thawing and at a certain magnitude of the filtration velocity, soil particles are removed from the flow, and underground cavities are created. These cavities increase in sizes and reach their critical sizes that result in a permafrost arch collapse. A mathematical model is based on mass conservation equations for water, moving solids particles and stationary porous skeleton along with Darcy's law for water and moving solid particles (similar to a classical Muskat-Leverett model), and the equation for the intensity of suffusion flow. The problem statement and supporting information are provided in Paragraph 1 along with the statement of a theorem of unique classical solvability. Seven lemmas and physical principles for maxima of water saturation and porosity are presented in Paragraph 2. A key moment is to prove Holder's continuity of saturation. Then, the conditions of Schauder's theorem of a fixed point are verified.

Key words: multiphase flow, porous medium, suffusion, phase transition, saturation.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. Изучается следующая система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(K_0(\phi)a(s)\bigtriangledown s - b(s)v(t) + F(s,\phi)), \quad (1)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -I(s,\phi), \quad (2)$$

решаемая в области $(x,t) \in Q_T = Q \times (0,T)$, $Q = (0,1)$, при краевых и начальных условиях

$$s(0,t) = s_0(t), \quad s(1,t) = s_1(t), \quad (3)$$

$$s(x,0) = s^0(x), \quad \phi(x,0) = \phi^0(x).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства № 2014/2 и гранта РФФИ № 13-08-01097.

Данная начально-краевая задача описывает одномерное движение в неподвижной пористой среде двухфазной смеси, состоящей из твердых частиц и жидкости [1, 2]. Здесь ϕ — пористость; s — насыщенность воды; I — интенсивность перехода массы из твердого скелета; кроме того, $K_0(\phi), a(s), b(s), F(s,\phi)$ — заданные функции. Задача записана в эйлеровых координатах x, t. Искомыми являются величины s и ϕ. Математические модели процесса суффозии изложены в работах [1,2]. Математическое обоснование постановок задач отсутствует, за исключением рассмотрения частных решений [3–5]. Вывод уравнений (1), (2) дан в работе [6]. Система уравнений близка по структуре уравнениям двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей в случае известной пористости [7–9]. Особенностью данной задачи является необходимость обоснования физического принципа максимума для пористости ϕ и насыщенности s вида $0 \le \phi \le 1$, $0 \le s \le 1$. Кроме того, коэффициент $a(s)$ в общем случае обладает свойствами $a(0) = a(1) = 0$, $a(s) > 0$ при $s \in (0,1)$, т. е. уравнение (1) является вырождающимся на решении, а переменная неизвестная пористость существенно усложняет структуру системы (1), (2).

Поэтому на первом этапе исследования задачи (1)–(3) рассматривается случай невырождающегося уравнения (1) ($a(s) > 0$ при $s \in [0,1]$, $0 < \phi \le 1$). Целью работы является доказательство классической разрешимости задачи (1)–(3).

Для интенсивности фазовых переходов принимается следующая модельная зависимость [1]: $I = \delta(s)R(\phi)max\{|v(t)| - v_k, 0\}$,

$$\delta(s) = \begin{cases} 0, & s \ge 1; \\ 1-s, & 0 < s < 1; \\ 1, & s \le 0. \end{cases}$$

$$R(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi \ge 1; \\ \phi(1-\phi), & 0 < \phi < 1; \\ 0, & \phi \le 0. \end{cases}$$

где $v(t)$ — суммарная скорость фильтрации (заданная функция); v_k — предельное значение скорости фильтрации при превышении которой «запускается процесс» суффозии.

Определение 1. Классическим решением задачи (1)–(3) в цилиндре Q_T будем называть пару функций $s(x,t), \phi(x,t) \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q_T)$, удовлетворяющую уравнениям (1), (2) и условиям (3) в обычном смысле. Причем $0 \le s \le 1$, $0 < \phi \le 1$.

В дальнейшем будем придерживаться обозначений, принятых в [10].

Теорема. Пусть данные задачи (1)–(3) подчиняются условиям:

1. Функции $K_0(\phi), a(s), b(s), F(s,\phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $s \in [0,1]$, $\phi \in [0,1]$ и удовлетворяют условиям

$$0 < m \le K_0(\phi),\ a(s) \le M < \infty,$$

$F(s,\phi) = 0$ при $s < 0$, $s > 1$.

2. Функции $v(t)$, $s_0(t)$, $s_1(t)$, $s^0(x)$, $\phi^0(x)$ удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$v(t), s_0(t), s_1(t) \in C^{2+\alpha}[0,T];$$

$$s^0(x),\ \phi^0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{Q})$$

и условиям согласования

$$s_0(0) = s^0(0),\ s_1(0) = s^0(1),$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$|v(0)| > v_k,\ 0 \le s^0(x) \le 1,\ 0 < m_0 \le \phi^0 \le 1,$$

$$0 \le s_0(t) \le 1,\ 0 \le s_1(t) \le 1$$

где m_0, m, M, v_k — известные положительные постоянные.

Тогда для любого конечного интервала $(0,T]$ задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение:

$$\phi(x,t), s(x,t) \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q_T).$$

Более того,

$$0 \le s(x,t) \le 1,\ 0 < \phi(x,t) \le 1,\ (x,t) \in Q_T.$$

2. Разрешимость задачи. Для классического решения справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть пара (s,ϕ) — решение задачи (1)–(3) и выполнены условия теоремы, тогда $\phi_0 \le \le \phi \le 1$.

Доказательство. Оценка слева $\phi_0 \le \phi$ следует из свойств правой части уравнения (2) ($\phi_t > 0$), ϕ — монотонно возрастающая функция.

Умножив уравнение (2) на срезку $\overline{\phi} = = max\{\phi - 1, 0\}$ и проинтегрировав по области Q_T, получим

$$(\overline{\phi}_t, \overline{\phi})_{Q_T} = (\delta(s)R(\phi)max\{|\vec{v}(t)| - v_k, 0\}, \overline{\phi})_{Q_T}. \quad (4)$$

Отметим, что в силу определения срезки $\overline{\phi}$ интегралы в (4) берутся на самом деле по области $Q_T^* = \{(x,t) \in Q_T, \phi > 1\}$, в которой $\overline{\phi} = \phi - 1$, $\phi_t = \overline{\phi}_t$ и $R(\phi) = 0$. Из равенства (4) следует, что $\overline{\phi} \equiv 0$. Оценка справа доказана.

Замечание 1. Если $|\vec{v}(t)| < M$ ограниченная функция и выполнены условия леммы 1, то для пористости справедливо соотношение

$$\phi = \frac{\phi^0}{\phi^0 + (1-\phi^0)e^{-\int\limits_0^t \delta(s)max\{|\vec{v}(t)| - v_k, 0\}d\tau}},$$

заметим, что 1 является асимптотой функции ϕ.

Заменим $a(s)$ в уравнении (1) на $\overline{a}(s) = a(s)+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Лемма 2. Пусть пара (s, ϕ) — решение задачи (1)–(3), выполнены условия теоремы и $\phi_0 \le \phi \le 1$, тогда $0 \le s \le 1$.

Доказательство. Умножив уравнение (1) на срезку $\overline{s} = max\{s-1, 0\}$ и проинтегрировав по области Q_T, получим

$$(s\phi_t, \overline{s})_{Q_T} + (\phi\overline{s}_t, \overline{s})_{Q_T} =$$

$$= (\frac{\partial}{\partial x}(K_0 a\overline{s}_x + F), \overline{s})_{Q_T} - (v(t)b_s\overline{s}_x, \overline{s})_{Q_T}. \quad (5)$$

Заметим, что в силу определения срезки $\overline{s}$ интегралы в (5) берутся на самом деле по области $Q_T^* = \{(x,t) \in Q_T, s > 1\}$, в которой $\overline{s} = s-1$, $s_t = \overline{s}_t, s_x = \overline{s}_x$, $\phi_t > 0$ и $F = 0$. Из равенства (5) следует оценка

$$||\sqrt{\phi}\overline{s}||^2_{2,Q} \le C\int\limits_0^t ||\sqrt{\phi}\overline{s}||^2_{2,Q}d\tau,$$

где C — положительная постоянная. Следовательно, $\overline{s} \equiv 0$, т. е. $s \le 1$.

Аналогично проводится доказательство $s \ge 0$. Рассмотрим вместо $\overline{s}$ функцию $\underline{s} = max\{-s, 0\}$, получим

$$\frac{1}{2}||\sqrt{\phi}\underline{s}||^2_{2,Q} + \frac{1}{2}(\underline{s}\phi_t, \underline{s})_{Q_T} + (K_0\varepsilon\underline{s}_x, \underline{s}_x)_{Q_T} =$$

$$= -(v(t)b_s\underline{s}_x, \underline{s})_{Q_T}.$$

Отсюда, проводя аналогичные доказательству $s \le$ ≤ 1 оценки слагаемых, получаем, что $\underline{s} \equiv 0$ и, следовательно, $s \ge 0$.

Лемма 3. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ неотрицательная функция $y(t)$ равна нулю при $t = 0$ и удовлетворяет неравенству

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} \le C(\frac{dy(t)}{dt} + y(t) + B(t)), \quad (6)$$

с постоянной $C > 0$ и неотрицательной суммируемой на $[0,T]$ функцией $B(t)$. Тогда

$$y(t) \le \Phi(t) \equiv \frac{1}{C+2}(e^{(C+2)t} - 1)\frac{dy}{dt}(0) + \quad (7)$$

$$+Ce^{(C+1)t}\int\limits_0^t e^{-(C+2)t_1}\left(\int\limits_0^{t_1} e^{\tau}B(\tau)d\tau\right)dt_1,$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \le (C+1)\Phi(t) + \quad (8)$$

$$+e^{-t}\left(\frac{dy}{dt}(0) + C\int\limits_0^t e^{\tau}B(\tau)d\tau\right).$$

Доказательство. Умножим обе части (6) на e^t и результат запишем в виде неравенства

$$\frac{d}{dt}(e^t\left(\frac{dy}{dt} - (C+1)y\right) + e^t y) \le Ce^tB(t).$$

Отбрасывая неотрицательное второе слагаемое левой части и интегрируя полученное неравенство по t от 0 до t_1, выводим

$$\frac{dy(t_1)}{dt_1} - (C+1)y(t_1) \le$$

$$\le e^{-t_1}\left(\frac{dy}{dt_1}(0) + C\int\limits_0^{t_1} e^{\tau}B(\tau)d\tau\right).$$

Откуда имеем

$$\frac{d}{dt_1}\left(e^{-(C+1)t_1}y(t_1)\right) \le$$

$$\le e^{-(C+2)t_1}\left(\frac{dy}{dt_1}(0) + C\int\limits_0^{t_1} e^{\tau}B(\tau)d\tau\right)$$

и, следовательно,

$$y(t) \le \frac{1}{C+2}(e^{(C+1)t} - e^{-t})\frac{dy}{dt}(0) +$$

$$+Ce^{(C+1)t}\int\limits_0^t e^{-(C+2)t_1}\left(\int\limits_0^{t_1} e^{\tau}B(\tau)d\tau\right)dt_1.$$

Из этого неравенства следуют (7) и (8), лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть две пары (s_i, ϕ_i), $i = 1,2$, являются классическими решениями задачи (1)–(2) с граничными $s_0^{(i)}, s_1^{(i)}$ и начальными s_i^0, ϕ_i^0 условиями соответственно. Пусть

$$||s_0^1 - s_0^2|| + ||s_1^1 - s_1^2|| + ||s_1^0 - s_1^0|| + ||\phi_1^0 - \phi_1^0|| = \delta,$$

тогда верны оценки

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 s^2dxdt \le C\delta, \quad \int\limits_0^t\int\limits_0^1 s_x^2dxdt \le C\delta, \quad (9)$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \phi_t^2dxdt \le C\delta, \quad \int\limits_0^t\int\limits_0^1 \phi^2dxdt \le C\delta,$$

где постоянная C зависит только от m_0, m, M, v_k.

Доказательство. Пара функций $(s = s^{(1)} - s^{(2)}, \phi = \phi^{(1)} - \phi^{(2)})$ есть решение системы

$$\frac{\partial(a_0s + a_1\phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(b_0s_x - b_1sb_2\phi), \quad (10)$$

$$\frac{\partial(h_0\phi)}{\partial t} = hs. \quad (11)$$

Здесь $a_0 = \phi^{(1)} > 0$, $a_1 = s^{(2)} > 0$,
$b_0 = K_0(\phi^{(2)})a(s^{(2)}) > 0$,
$b_1(s^{1)}, s^{(2)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}), b_2(s^{(1)}, s^{(2)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)})$,

$$h_0 = \frac{G(\phi^{(1)}) - G(\phi^{(2)})}{\phi^{(1)} - \phi^{(2)}}, \quad G(\phi) = \int\limits_0^\phi \frac{1}{R(\zeta)} d\zeta,$$

$$h = \frac{(\delta(s^{(1)}) - \delta(s^{(2)}))max\{|\vec{v}(t)| - v_k, 0\}}{s^{(1)} - s^{(2)}},$$

$$s|_{x=0} = s_0^{(1)} - s_0^{(2)} = s_0(t),$$

$$s|_{x=1} = s_1^{(1)} - s_1^{(2)} = s_1(t),$$

$$s|_{t=0} = s_1^0 - s_2^0 = s^0(x),$$

$$\phi|_{t=0} = \phi_1^0 - \phi_2^0 = \phi^0(x).$$

После замены $u = h_0\phi$, $w = s - \psi(x,t)$, $\psi(x,t) = (1-x)s_0(t) + xs_1(t)$ уравнения (10) и (11) примут вид

$$a_0 w_t + \overline{a}_1 w + a_0 \psi_t + \widetilde{a}_{1t} u = (b_0 w_x + b_1 w + \widetilde{b}_2 u + b_0 \psi_x + b_1 \psi)_x,$$

$$u_t = hw + h\psi(x,t). \tag{12}$$

Здесь $\overline{a}_1 = a_{0t} + a_1 h/h_0$, $\widetilde{a}_1 = a_1/h_0$, $\widetilde{b}_2 = b_1/h_0$, Заметим, что $w|_{x=0} = w|_{x=1} = 0$. Умножим уравнение (12) на w и проинтегрируем по x и t, для полученного представления справедлива оценка

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 a_0 w^2 dx \le \tag{13}$$

$$\le C(\int\limits_0^1 a_0 w^2 dx + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 a_0 w^2 dx dt + B(t)),$$

$$B(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 (\psi_t^2 + \psi^2 + \psi_x^2 + |u(x,0)|^2) dx dt,$$

где постоянная C зависит только от m_0, m, M, v_k. Если

$$y = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 a_0 w^2 dx \ge 0,$$

то уравнение (13) примет вид (6) и из леммы 4 следует выполнение оценок (9).

Заменой $V = \int\limits_0^s a(\tau) d\tau$ уравнение (1) приведем к виду

$$V_t - \frac{K_0(\phi)}{\phi} a(s(V)) V_{xx} = f. \tag{14}$$

$$f = -a(s(V))s(V)\frac{\phi_t}{\phi} + a\frac{1}{\phi}\frac{\partial K_0}{\partial \phi}\phi_x V_x +$$

$$+ a\frac{1}{\phi}\frac{\partial F}{\partial V} V_x + a\frac{1}{\phi}\frac{\partial F}{\partial \phi}\phi_x - a\frac{v(t)}{\phi}\frac{\partial b}{\partial V} V_x,$$

Лемма 5. Если ϕ и s классическое решение, то справедливо неравенство

$$\int\limits_0^1 V_x^2 dx + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 V_{xx}^2 dx dt \le C_1(m_0, m, M, v_k). \tag{15}$$

Доказательство. Умножив уравнение (1) на s и проинтегрировав по x и t, получим оценку

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 (\phi_x^2 + s_x^2) dx dt \le C(m_0, m, M, v_k).$$

Оценка (15) получается стандартным образом умножением уравнения (14) на V_{xx} и последующим интегрированием. Основное нелинейное слагаемое оценивается следующим образом:

$$\int\limits_0^1 |\phi_x V_x V_{xx}| dx \le \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^1 |V_x|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^1 |V_{xx}|^2 dx.$$

Лемма 6. Если ϕ и s классическое решение, то справедливо неравенство

$$\int\limits_0^1 V_t^2 dx + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 V_{xt}^2 dx dt \le C_2(m_0, m, M, v_k). \tag{16}$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (14) по t, умножим на V_t и полученное соотношение проинтегрируем по x и t. Основное нелинейное слагаемое оценивается следующим образом:

$$\int\limits_0^1 |\phi_t V_t^2 V_x| dx \le$$

$$\le C(1 + (\max_x V_x^2 + \max_x \phi_x^2)) \int\limits_0^1 V_t^2 dx \le C_2.$$

Замечание 2. Из оценок (9), (15) и (16) получим

$$||s||_Q^{(\alpha)} \le C_3(m_0, m, M, v_k),$$

$$||\phi||_Q^{(\alpha)} \le C_4(m_0, m, M, v_k).$$

Доказательство теоремы. Подставим в коэффициенты уравнения (2) произвольную непрерывную функцию $\widetilde{s}(x,t)$, удовлетворяющую неравенству $|\widetilde{s}| \le M$, где постоянная $M > 0$ будет выбрана ниже. Полученная при этом линейная задача

$$\frac{\partial s\widetilde{\phi}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(K_0(\widetilde{\phi})a(\widetilde{s}) \bigtriangledown s - b(\widetilde{s})\vec{v}(t) + \vec{F}(\widetilde{s}, \widetilde{\phi})), \tag{17}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial t} = \delta(\widetilde{s})R(\widetilde{\phi})max\{|\vec{v}(t)| - v_k, 0\}, \tag{18}$$

удовлетворяет граничным и начальным условиям (3). Следуя доказательствам лемм 1–6, получим, в частности, оценку постоянной Гельдера

$$||s||_Q^{(\alpha)} \leq C_3(m_0, m, M, v_k). \tag{19}$$

Следует заметить, что данная оценка позволяет воспользоваться оценками шаудеровского типа и повысить гладкость решения до классического.

Выберем $M = C_3$ и рассмотрим отображение $U : \widetilde{s} \to s$ из неравенства (19) следует, что это отображение в пространстве $C_{0,0}(Q)$ переводит шар $\{|\widetilde{s}| \leq M_1\}$ в себя. Кроме того, оно непрерывно в пространстве $C_{0,0}(Q)$. Отображение U является вполне непрерывным: любую непрерывную функцию оно переводит в функцию класса $C^{\alpha,\alpha/2}(Q)$ удовлетворяющую неравенству (19).

Таким образом, для отображения U справедливы все условия теоремы Шаудера о неподвижной точке [11]. Следовательно, существует по крайней мере одна неподвижная точка $s(x,t) \equiv \widetilde{s}(x,t)$ этого отображения и соответствующее этой функции классическое решение $\phi(x,t) \equiv \widetilde{\phi}(x,t)$ задачи (17)–(18). Очевидно, пара $(\phi(x,t)s(x,t))$ является классическим решением задачи (1)–(3). Единственность следует из леммы 4.

Заключение. Доказана глобальная разрешимость начально-краевой задачи для невырожденных уравнений внутренней эрозии. Естественным продолжением работы будет рассмотрение случая вырождающихся уравнений и учет сжимаемости грунта. Первые результаты в этом направлении получены в работах [12–15].

Библиографический список

1. Vardoulakis I. Sand-production and sand internal erosion: Continuum modeling // Alert School: Geomechanical and Structural Issues in Energy Production. — 2006.

2. Parron Vera M.A. et al., Analytical solution of coupled soil erosion and consolidation equations by asymptotic expansion approach, Appl. Math. Modell. — 2014.

3. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное моделирование процесса суффозионного выноса грунта // Сборник трудов 17-й регион. конф. по математике «МАК-2014». — Барнаул, 2014.

4. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое // Известия Алт. гос. ун-та. — 2014. — Вып. 1/2 (85). DOI 10.14258/izvasu(2014)1.2-06.

5. Папин А.А., Гагарин Л.А., Шепелев В.В., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами // Известия Алт. гос. ун-та. — 2013. — Вып. 1/2 (77). DOI 10.14258/izvasu(2013)1.2-06.

6. Папин А.А., Вайгант В.А., Сибин А.Н. Математическая модель изотермической внутренней эрозии // Известия Алт. гос. ун-та. — 2015. — Вып. 1/1 (85). DOI 10.14258/izvasu(2015)1.1-16.

7. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск, 1983.

8. Ахмерова И.Г., Папин А.А. Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси // Математические заметки. — 2014. — Т. 96, №2.

9. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Разрешимость системы уравнений одномерного движения теплопроводной двухфазной смеси // Математические заметки. — 2010. — Т. 87, №2.

10. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М., 1967.

11. Кружков С.Н., Сукорянский С.М., Краевые задачи для систем уравнений типа двухфазной фильтрации; постановка задач, вопросы разрешимости, обоснование приближенных методов // Матем. сб. — 1977. — Т. 104 (146), №1 (9).

12. Токарева М.А. Двумерная задача фильтрации в тонком пороупругом слое // Известия Алт. гос. ун-та. — 2013. — Вып. 1/1 (77).

13. Папин А.А., Токарева М.А. Динамика тающего деформированного снежно-ледового покрова // Вестник Новосибирского государственного университета. — Серия: Математика, механика, информатика. — 2012. — Т. 12, №4.

14. Гоман В.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Численное решение двумерной задачи движения воды и воздуха в тающем снеге // Известия Алт. гос. ун-та. — 2014. — Вып. 1/2 (81). DOI 10.14258/izvasu(2014)1.2-01.

15. Шишмарев К.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Труды молодых ученых Алт. гос. ун-та. — 2011. — №8.