УДК 532.5

Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде*

А.А. Папин[1], *Ю.Ю. Подладчиков*[2]

[1] Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2] Университет Лозанны (Лозанна, Швейцария)

Isothermal Motion of Two Immiscible Fluids in a Poroelastic Medium

A.A. Papin[1], *Y.Y. Podladchikov*[2]

[1] Altai State University (Barnaul, Russia)
[2] University of Lozanna (Lozanna, Swiss)

Рассматривается математическая модель совместного движения двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде. Данная модель является обобщением классической модели Маскета-Леверетта, в которой пористость считается заданной функцией пространственной координаты. Учет сжимаемости пористой среды является принципиальным моментом. В основе предлагаемой модели лежат уравнения сохранения массы жидкостей и пористого скелета, закон Дарси для жидкостей, учитывающий движение пористого скелета, формула Лапласа для капиллярного давления, реологическое уравнение для пористости и условие равновесия «системы в целом». В пункте 1 дается постановка задачи и проводится преобразование трехмерной системы уравнений, записанной в переменных Эйлера. В результате возникает система составного типа, содержащая, как в классической модели Маскета-Леверетта, вырождающиеся на решении уравнения. Для скорости твердой фазы возникает условие совместности. В пункте 2 рассматривается одномерная задача. Переход в переменные Лагранжа приводит к замкнутой системе уравнений, которая не содержит скорости твердой фазы.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, закон Дарси, насыщенность, пороупругость, переменные Лагранжа.

In this paper, a mathematical model of simultaneous flow of two immiscible liquids in a poroelastic medium are considered. This model is a generalization of the classical Muskat-Leverett model, in which porosity is considered to be a given function of spatial coordinates. The accounting of compressibility of the porous medium is the crucial moment. The proposed model is based on the mass conservation equations for liquids and porous skeleton, Darcy's law for liquids, the movement of the porous skeleton, the formula for the Laplace capillary pressure, rheological equation for porosity, and the condition of equilibrium "of the system as a whole". Paragraph 1 provides the formulation of the problem and the conversion of a three-dimensional system of equations written in Euler variables. The result is a system of a composite type that, like the classical Muskat-Leverett model, consists of equations with degenerate solutions. A compatibility condition occurs for solid phase velocity. Passing to Lagrange variables results in the closed system of equations free of solid phase velocity.

Key words: two-phase filtration, Darcy's law, saturation, poroelastic, Lagrange variables.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-24

1. Постановка задачи. Рассматривается движение двухфазной несжимаемой жидкости в неоднородном анизотропном грунте с пористостью ϕ (доля объема среды, приходящаяся на пустоты). Уравнения неразрывности с учетом пористости принимают вид [1–3]

$$\frac{\partial \phi \rho_i^0 s_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i^0 \phi s_i \vec{u}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \qquad (1)$$

где $\vec{u}_i$, s_i — скорость и насыщенность фаз (доля пор, занятых i-й фазой). Вместо уравнений сохранения импульса в теории двухфазной фильтрации используется обобщенный закон Дарси [4]

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2, \qquad (2)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства № 2014/2 и гранта РФФИ № 13-08-01097.

где $\vec{u}_3$ — скорость твердого скелета; K_0 — тензор фильтрации (функция пористости); $\overline{k_{0i}}$ — относительные фазовые проницаемости; μ_i — коэффициенты динамической вязкости; p_i — давления фаз; $\vec{g}$ — вектор ускорения силы тяжести. При этом $\overline{k_{0i}}$ должны зависеть от насыщенности s_i, поскольку часть порового пространства занята другой жидкостью [1].

По определению, насыщенности s_i меняются в пределах $0 < s_i^0 \le s_i \le 1 - s_j^0 < 1, \quad i \ne j$, $s_1 + s_2 = 1$, и при достижении значений $s_i = s_i^0$ движение i-й компоненты прекращается, что обеспечивается выполнением условий $\overline{k_{0i}}(s_i^0) = 0$, $i = 1, 2$.

Учет капиллярных сил означает, что фазовые давления p_i различаются на величину капиллярного скачка

$$p_2 - p_1 = p_c(x, s), \quad s = \frac{s_1 - s_1^0}{1 - s_1^0 - s_2^0}, \quad 0 \le s \le 1. \tag{3}$$

Капиллярное давление p_c определяется кривизной границы раздела двух несмешивающихся жидкостей, насыщенностью смачивающей жидкости, характеристиками пористой среды и жидкостей и выражается формулой Лапласа [3]

$$p_c(x, s) = \overline{p_c}(x) j(s), \tag{4}$$

где $\overline{p_c}(x)$ — заданная функция точки $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $j(s)$ — функция Леверетта $\Big(\frac{dj(s)}{ds} \le 0$, $j(0) = \infty$, $j(1) = 0\Big)$.

Система уравнений (1)–(4) относительно характеристик $\vec{u}_i, p_i$ и $s = (s_1 - s_1^0)/(1 - s_1^0 - s_2^0)$ несмешивающихся жидкостей, движущихся в недеформируемой пористой среде, в изотермическом случае (температура в потоке постоянная) замыкается либо предположением о несжимаемости жидкостей, т.е. $\rho_i^0 = const$, либо условием $\rho_i^0 = \rho_i^0(p_i)$.

Полученную математическую модель в случае неподвижной пористой среды ($\vec{u}_3 = 0$) называют моделью Маскета-Леверетта [5–7].

Принципиальным моментом является учет сжимаемости пористой среды. Следуя [8–10], дополним систему (1)–(4) уравнением сохранения массы твердого скелета, реологическим уравнением для пористости и условием равновесия «системы в целом»:

$$\frac{\partial (1 - \phi)\rho_3^0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_3^0 (1 - \phi) \vec{u}_3) = 0, \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_3 = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e - \beta_t(\phi)\Big(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e\Big), \tag{6}$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot} \vec{g}, \tag{7}$$

где ρ_3^0 — истинная плотность твердой фазы; $p_e = p_{tot} - p_f$ — эффективное давление; $p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi) p_s$ — общее давление; $p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2$; p_s — соответственно давления жидкой и твердой фаз; $\rho_{tot} = (1 - \phi)\rho_3^0 + \phi(s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0)$ — общая плотность; $\xi(\phi)$ и $\beta_t(\phi)$ — коэффициенты объемной вязкости и объемной сжимаемости горной породы есть заданные функции (модельные зависимости: $\frac{1}{\xi(\phi)} = \phi^m/\nu, \beta_t(\phi) = \phi^b \beta_\phi$, где $b = 1/2$; $m \in [0, 2]$; $n = 3$; μ, ν, β_ϕ — положительные параметры пороупругой среды [9, 10]). Система (1)–(7) записана в эйлеровых координатах $\vec{x} \in R^3$, $t \in [0, T]$. Истинные плотности ρ_i^0 принимаются постоянными. Поскольку $s_2 = 1 - s_1$, то неизвестными являются 14 скалярных величин: s_1, ϕ, p_1, p_2, p_s, $3\vec{u}_1$, $3\vec{u}_2$, $3\vec{u}_3$. Для их определения служат также 14 скалярных уравнений: два уравнения неразрывности (1), шесть уравнений закона Дарси (2), уравнение для капиллярного скачка (3), уравнение неразрывности твердой фазы (5), реологическое соотношение (6), три уравнения равновесия (7).

Преобразуем систему (1)–(7). Сложив уравнения (1) и (5), получим равенство

$$\nabla \cdot (\phi(s_1 \vec{u}_1 + s_2 \vec{u}_2) + (1 - \phi)\vec{u}_3) = 0,$$

которое приводится к виду

$$\nabla \cdot (\phi s_1 (\vec{u}_1 - \vec{u}_3) + \phi s_2 (\vec{u}_2 - \vec{u}_3) + \vec{u}_3) = 0.$$

Положим

$$\vec{v} = \phi s_1 (\vec{u}_1 - \vec{u}_3) + \phi s_2 (\vec{u}_2 - \vec{u}_3), \quad k_{0i} = \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}.$$

Используя (2) и (3), получим следующее представление для $\vec{v}$:

$$-\vec{v} = K_0(\phi)(k_{01}(\bigtriangledown p_1 + \rho_1^0 \vec{g}) + $$
$$+ k_{02}(\bigtriangledown (p_1 + p_c) + \rho_2^0 \vec{g})) = K_0(\phi) k(s) \bigtriangledown p + \vec{f},$$

где «приведенное» давление p определяется равенством

$$p = p_1 - \int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi.$$

Здесь также введены следующие обозначения:

$$k(s) = k_{01} + k_{02},$$

$$\vec{f} = K_0 (k_{02} \bigtriangledown_x p_c + k \int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \bigtriangledown_x \frac{\partial p_c(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi +$$
$$+ (k_{01}\rho_1^0 + k_{02}\rho_2^0)\vec{g}),$$

а символ $\bigtriangledown_x$ применяется только по переменной $\vec{x}$, входящей явно, например

$$\bigtriangledown_x p_c(s, x) = \left(\frac{\partial p_c(s, x)}{\partial x_1}, \frac{\partial p_c(s, x)}{\partial x_2}, \frac{\partial p_c(s, x)}{\partial x_3} \right).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\nabla \cdot \vec{u}_3 = -\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (K_0(\phi) k(s) \bigtriangledown p + \vec{f}). \quad (8)$$

С учетом введенного давления p для $\vec{v}_1 \equiv \equiv s_1 \phi \vec{u}_1$ имеем

$$\vec{v}_1 = s_1\phi(\vec{u}_1 - \vec{u}_3) + s_1\phi\vec{u}_3 =$$

$$= -K_0 a \bigtriangledown s - K_0 k_{01} \bigtriangledown p - \vec{f}_0 + s_1\phi\vec{u}_3,$$

где

$$a = -\frac{k_{01}k_{02}}{k}\frac{\partial p_c}{\partial s}, \quad \frac{\partial p_c}{\partial s} \le 0,$$

$$\vec{f}_0 = K_0 k_{01}(\int\limits_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \bigtriangledown_x \frac{\partial p_c(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi + \rho_1^0 \vec{g}).$$

Таким образом, уравнение неразрывности для первой фазы можно представить в виде

$$\frac{\partial \phi s_1}{\partial t} - \nabla \cdot (K_0 a \bigtriangledown s + K_0 k_{01} \bigtriangledown p + \vec{f}_0) +$$

$$+ \nabla \cdot (\phi s_1 \vec{u}_3) = 0. \quad (9)$$

Система (8), (9) служит для определения s, p (при заданных ϕ, $div\vec{u}_3$). Давления p_e, p_{tot}, p_f и p связаны равенствами

$$p_f \equiv s_1 p_1 + s_2 p_2 = p + G_c + s_2 p_e,$$

$$G_c = \int\limits_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)}\frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi, \quad (10)$$

$$p_e \equiv p_{tot} - p_f = p_{tot} - p - (G_c + s_2 p_c), \quad (11)$$

$$p_{tot} \equiv \phi p_f + (1-\phi) p_s =$$

$$\phi(p + G_c + s_2 p_c) + (1-\phi) p_s, \quad (12)$$

С учетом p_{tot} для p_e получим

$$p_e = (1-\phi)(p_s - p - G_c - s_2 p_c). \quad (13)$$

Формулы (10)–(13) дают представление p_e, p_{tot}, p_f через p. Обратная связь:

$$p = p_{tot} - p_e - (G_c + s_2 p_c), \quad (14)$$

или

$$-p = \frac{1}{1-\phi} p_e - p_s + (G_c + s_2 p_c). \quad (15)$$

В силу (7) и (14) имеем

$$\nabla p = \rho_{tot}\vec{g} - \nabla p_e - \nabla(G_c + s_2 p_c).$$

Тогда для $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$ получим

$$-\vec{v} = K_0(\phi) k(s)(\rho_{tot}\vec{g} - \bigtriangledown p_e - \nabla(G_c + s_2 p_c)) + \vec{f},$$

$$\vec{v}_1 = -K_0 a \bigtriangledown s - \vec{f}_0 + s_1\phi\vec{u}_3 -$$

$$-K_0 k_{01} \bigtriangledown (\rho_{tot}\vec{g} - \nabla p_e - \nabla(G_c + s_2 p_c)).$$

Наконец, p_{tot} через p_e выражается следующим образом:

$$p_{tot} = p_c - \frac{\phi}{1-\phi} p_e. \quad (16)$$

Опишем схему решения системы (1)–(7). Уравнение (5) представим в виде

$$\frac{\partial \ln(1-\phi)}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla \ln(1-\phi) = -\nabla \cdot \vec{u}_3, \ \phi|_{t=0} = \phi^0(\vec{x})$$

и будем рассматривать относительно $(1-\phi)$ при заданном поле скоростей $\vec{u}_3$. Характеристики этого уравнения определяются задачей Коши

$$\frac{\partial \vec{y}(\tau, t, \vec{x})}{\partial \tau} = \vec{u}_3(\vec{y}(\tau, t, \vec{x}), \tau), \quad \vec{y}|_{\tau=t} = \vec{x}.$$

Если $\vec{u}_3$ – достаточно гладкая функция (например, $\vec{u}_3(\vec{x}, t) \in W_q^{2,1}(Q_T)$, $q > n$, $\phi^0 \in [m_0, M_0]$, $m_0 > 0$, $M_0 < 1$, $\nabla\phi^0(\vec{x}) \in L_q(\Omega)$), то справедливо следующее представление [11]:

$$(1 - \phi(\vec{x}, t)) = (1 - \phi^0(\vec{y}(0, t, \vec{x})))\cdot$$

$$\exp\Big(\int\limits_0^t \nabla_y \cdot \vec{u}_3(\vec{y}(\tau, t, \vec{x}), \tau) d\tau\Big).$$

Подставляя найденное ϕ в уравнение (6), найдем эффективное давление как функцию $\vec{u}_3$.

Систему (8), (9) рассмотрим относительно насыщенности s и приведенного давления p при заданных значениях $\vec{u}_3$.

Учитывая связь p и p_e из (15), получим, что p_s определяется через p, p_e, s, т.е. через $\vec{u}_3$. Следовательно, p_{tot}, ρ_{tot} также определяется через $\vec{u}_3$, т.е. уравнения системы (7) с учетом (16) или (12) служат для определения $\vec{u}_3$.

2. Одномерное движение, переменные Лагранжа. В одномерном случае система (1)–(7) принимает вид

$$\frac{\partial \phi s_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi s_i u_i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

$$s_i\phi(u_i - u_3) = -K_0 \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}(\frac{\partial p_i}{\partial x} - \rho_i^0 g), \quad i = 1, 2, \ (18)$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad p_2 - p_1 = p_c(x, s), \quad (19)$$

$$s = \frac{s_1 - s_1^0}{1 - s_1^0 - s_2^0}, \quad 0 \le s \le 1,$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)u_3) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + u_3\frac{\partial p_e}{\partial x}), \quad (21)$$

$$p_e = p_{tot} - p_f, \quad p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2,$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g, \quad (22)$$

$$\rho_{tot} = (1-\phi)\rho_3^0 + \phi(s_1\rho_1^0 + s_2\rho_2^0).$$

Здесь (x,t) — переменные Эйлера; $a_1(\phi) = \dfrac{1}{\xi(\phi)}$, $a_2(\phi) = \beta_t(\phi)$.

Пусть $y = y(\zeta, x, t)$ — решение задачи Коши [5,12]:

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = u_3(y,\zeta), \quad y|_{\zeta=t} = x. \tag{23}$$

Положим $\xi = y(\zeta, x, t)|_{\zeta=0}$ и возьмем за новые переменные ξ и t. Тогда $1-\phi(\xi,t) = (1-\phi^0(\xi))J(\xi,t)$, где $J(\xi,t) = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}$ — якобиан перехода. Система уравнений (17)–(22) в новых переменных имеет вид

$$\frac{\partial \phi s_i}{\partial t} + J\frac{\partial}{\partial \xi}(\phi s_i u_i) - u_3 J\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi s_i) = 0, \quad i=1,2,$$

$$s_i\phi(u_i - u_3) = -K_0\frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}\left(\frac{(1-\phi)}{(1-\phi^0)}\frac{\partial p_i}{\partial \xi} - \rho_i^0 g\right), \quad i=1,2,$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad p_2 - p_1 = p_c(x,s) = \overline{p_c}(x)j(s),$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{(1-\phi)^2}{(1-\phi^0)}\frac{\partial u_3}{\partial\xi} = 0,$$

$$\frac{(1-\phi)}{(1-\phi^0)}\frac{\partial u_3}{\partial \xi} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t},$$

$$p_e = p_{tot} - p_f, \quad p_f = s_1p_1 + s_2p_2,$$

$$\frac{(1-\phi)}{(1-\phi^0)}\frac{\partial p_{tot}}{\partial\xi} = -\rho_{tot}g,$$

$$\rho_{tot} = (1-\phi)\rho_3^0 + \phi(s_1\rho_1^0 + s_2\rho_2^0).$$

Поскольку

$$u_3\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi s_i) = \frac{\partial}{\partial \xi}(\phi s_i u_3) - \phi s_i\frac{\partial u_3}{\partial\xi},$$

то первые уравнения полученной системы можно привести к виду

$$\frac{1}{(1-\phi)}\frac{\partial}{\partial t}(\phi s_i) + \frac{1}{(1-\phi^0)}\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi s_i(u_3 - u_1)) +$$

$$+\frac{1}{(1-\phi^0)}\phi s_i\frac{\partial u_3}{\partial \xi} = 0, \quad i=1,2.$$

Используя уравнение неразрывности для третьей фазы, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}s_i\right) + \frac{1}{(1-\phi^0)}\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi s_i(u_i - u_3)) = 0.$$

Наконец, переходя от (ξ,t) к массовым лагранжевым переменным $(\bar{x},t)$ по правилу

$$(1-\phi^0(\xi))d\xi = d\bar{x}, \quad \bar{x}(\xi) = \int_0^{\xi}(1-\phi^0(\eta))d\eta$$

и сохраняя затем для переменной $\bar{x}$ обозначение x, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}s_i\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi s_i(u_i - u_3)) = 0, \quad i=1,2, \tag{24}$$

$$s_i\phi(u_i-u_3) = -K_0\frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}\left((1-\phi)\frac{\partial p_i}{\partial x} - \rho_i^0 g\right), \tag{25}$$

$$s_1+s_2 = 1, \quad p_2 - p_1 = p_c(x,s) = \overline{p_c}(x)j(s), \tag{26}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2\frac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \tag{27}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial u_3}{\partial x} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{28}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot}g. \tag{29}$$

Преобразование уравнений (24)–(29). Положим $\dfrac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i} = k_{0i}$ и для сокращения выкладок будем считать $p_c = p_c(s)$.

Складывая уравнения неразрывности для $i = 1$ и $i = 2$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(s\phi(u_1-u_3) + (1-s)\phi(u_2-u_3)) = 0.$$

Используя законы Дарси и формулу Лапласа для скачка давлений, получим следующую цепочку равенств:

$$-v \equiv -s_1\phi(u_1-u_3) - s_2\phi(u_2-u_3) = K(1-\phi)\frac{\partial p}{\partial x} + f.$$

где

$$p = p_1 - \int_s^1 \frac{k_{02}}{k}\frac{\partial p_c}{\partial \xi}d\xi,$$

$$k = k_{01} + k_{02}, \quad K = K_0 k,$$

$$f = -K_0 g(k_{01}\rho_1^0 + k_{02}\rho_2^0).$$

Следовательно,

$$-v = K(1-\phi)\frac{\partial p}{\partial x} + f,$$

и преобразованное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(K(1-\phi)\frac{\partial p}{\partial x} + f\right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

С учетом равенства

$$p_1 = p + \int_s^1 \frac{k_{02}}{k}\frac{\partial p_c}{\partial\xi}d\xi$$

для $s_1\phi(u_1 - u_3)$

имеем

$$-s_1\phi(u_1-u_3)=K_0k_{01}((1-\phi)\frac{\partial p}{\partial x}-$$

$$-(1-\phi)\frac{k_{02}}{k_{01}+k_{02}}\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}-\rho_1^0 g)=$$

$$=(1-\phi)K_0a(s)\frac{\partial s}{\partial x}+(1-\phi)K_1\frac{\partial p}{\partial x}+f_0,$$

где

$$a(s)=-\frac{k_{01}k_{02}}{k_{01}+k_{02}}\frac{\partial p_c}{\partial s}\geq 0,\quad a(0)=a(1)=0,$$

$$K_1=K_0k_{01},\quad f_0=-K_1\rho_1^0 g.$$

Уравнение неразрывности для $i=1$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}s_1)-\frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)K_0a(s)\frac{\partial s}{\partial x}+$$

$$+(1-\phi)K_1\frac{\partial p}{\partial x}+f_0)=0.$$

Этому уравнению можно придать другую форму. Поскольку

$$(1-\phi)K_1\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{k_{01}}{k}(v+f),$$

то

$$-s_1\phi(u_1-u_3)=(1-\phi)K_0a(s)\frac{\partial s}{\partial x}-b(s)v+F,$$

$$F=f_0-b(s)f,\quad b(s)=\frac{k_{01}}{k},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}s_1)-\frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)K_0a(s)\frac{\partial s}{\partial x}-b(s)v+F)=0.$$

Преобразованная система (24)–(29) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}s_1)-\frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)K_0a(s)\frac{\partial s}{\partial x}+$$

$$+(1-\phi)K_1\frac{\partial p}{\partial x}+f_0)=0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi})-\frac{\partial}{\partial x}(K(1-\phi)\frac{\partial p}{\partial x}+f)=0, \tag{31}$$

$$\frac{1}{(1-\phi)}\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}=a_1(\phi)p_e+a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{32}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=-\rho_{tot}g, \tag{33}$$

Скорость u_3 явно не входит в систему (30)–(33). С учетом формул (12), (13) для p_{tot} и p_e четыре уравнения системы служат для нахождения s, p, ϕ, p_s. Затем из (27) находим u_3. Наконец, из (23) восстанавливаем переменные Эйлера.

Заключение. В работе предложена новая математическая модель изотермического движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде. Если пористость среды — заданная функция точки, а скорость среды равна нулю, то уравнения модели совпадают с уравнениями классической модели Маскета-Леверетта.

Библиографический список

1. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. — М., 1964.

2. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. — М., 1971.

3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. — М., 1977.

4. Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media. — Edwards. Ann Arbor, 1937.

5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск, 1983.

6. Жумагулов Б.Т., Зубов Н.В., Монахов В.Н., Смагулов Ш.С. Новые компьютерные технологии в нефтедобыче. — Алматы, 1996.

7. Жумагулов Б.Т., Монахов В.Н. Гидродинамика нефтедобычи. — Алматы, 2001.

8. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compactiondriven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. — 1998. — Vol. 11.

9. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Temperature-dependent viscoelastic compaction and compartmentalization in sedimentary basins // Tectonophysics. — 2000. — Vol. 324.

10. Tantserev E., Cristophe Y. Galerne, Podladchikov Y. Multiphase flow in multi-component porous visco-elastic media // The Fourth Biot Conference on Poromechanics. — 2009.

11. Солонников В.А. О разрешимости начально-краевой задачи для уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости // Записки науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. — 1976. — Т. 56.

12. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Разрешимость системы уравнений одномерного движения теплопроводной двухфазной смеси // Математические заметки. — 2010. — Т. 87. — Вып. 2.