УДК 519.87:33

Исследование экономико-математической модели локализованного рынка зерна

А.С. Маничева

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Investigation of Mathematical Economic Model of Localized Grain Market

A.S. Manicheva

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассмотрена упрощенная экономико-математическая модель — модель локализованного рынка зерна при следующих допущениях: структура рынка представляет собой монопсонию, не принимается во внимание пространственная распределенность участников рынка и их затраты на транспортировку и сбыт продукции, рассматриваемый рынок — однопродуктовый, нет перепродажи зерна между производителями. В качестве участников рынка зерна рассматриваются зерноперерабатывающее предприятие и производители зерна. Зерноперерабатывающее предприятие, обладая доминирующим положением на рынке, назначает цену закупки зерна. Производители определяют объем предложения, удовлетворение которого осуществляется переработчиком. Моделируемая система представлена в теоретико-игровой и агрегативной форме. Получено решение в стратегиях Г1, равновесное по Нэшу решение и гарантированные результаты участников рынка в предположении, что рынок является равновесным. Проведено исследование свойств найденных решений. Доказано утверждение, что найденное решение рассматриваемой модели является равновесным по Нэшу при определенных условиях, накладываемых на функцию издержек производителей зерна.

Ключевые слова: математическая модель, локализованный рынок, рынок зерна, гарантированный результат, равновесие по Нэшу.

In the paper, a simplified mathematical economic model of a localized grain market is investigated. Model assumptions are the following: the market structure is a monopsony, spatial distribution of market participants and transportation and marketing costs are not considered, the market is a single-product market, there is no grain resale among manufacturers. Grain market participants are grain manufacturers and grain processing companies. The grain processing companies dominate the market and set a grain purchasing price. The grain manufacturers determine the supply quantity to satisfy the needs of the grain processing companies. The simulated system is presented in a game-theoretic and aggregate form. The paper demonstrates and investigates features of three types of solutions: a G1 strategies solution, a Nash's equilibrium solution, and guaranteed results under the assumption that the market is in equilibrium state. It is proved that the solution for this model is a Nash's equilibrium solution under a certain conditions applied to the cost function of grain manufacturers.

Key words: mathematical model, localized market, grain market, guaranteed result, Nash equilibrium.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-23

Постановка задачи. Рассмотрим математическую модель локализованного рынка зерна, упрощенную версию модели рассредоточенного рынка [1]. Примем следующие допущения:

1. Представим рассматриваемую систему в виде двухуровневой иерархии с $(I+1)$ центрами принятия решений — производителями зерна и зерноперерабатывающим предприятием.

2. Структура рынка представляет собой монопсонию, где перерабатывающее предприятие выступает в качестве основного потребителя зерна на сырьевом рынке.

3. Имеющиеся переходящие запасы зерна и издержки на его хранение не учитываются.

4. Рассматривается средоточенная модель рынка зерна, т. е. не принимается во внимание простран-

ственная распределенность участников рынка и их затраты на транспортировку и сбыт продукции.

5. Рассматриваемый рынок — однопродуктовый; продукция (зерно) предполагается однородной по качеству.

6. Арбитраж отсутствует, т. е. нет перепродажи зерна между производителями.

7. Взаимодействие производителей сельскохозяйственной продукции и переработчиков осуществляется по сделкам купли-продажи.

В качестве поставщиков сырья для перерабатывающего предприятия выступают I сельскохозяйственных производителей $(i=1,...,I)$. Переработчик, обладая доминирующим положением на рынке, назначает цену закупки зерна c, за счет чего формируется спрос $X(c)$ — объем закупаемого зерна, обеспечивающий максимум прибыли от реализации переработанной продукции. Подобные формы взаимодействия исследованы в работе [2].

Производитель, исходя из имеющегося объема товарного зерна, определяет предложение в объеме x_i, $i=1,...,I$, удовлетворение которого осуществляется переработчиком — единственным потребителем на рынке.

Формализуем принципы функционирования участников рынка зерна в виде экономико-математической модели средоточенного (локализованного) рынка.

Цель функционирования переработчика заключается в максимизации прибыли от переработки и реализации готовой продукции и выражается целевой функцией $F(c)$ вида

$$F(c)=(d-c)X(c)\to\max_{c\in[\underline{c},\,\overline{c}]}, \qquad (1)$$

где d — доходность реализации единицы готовой продукции; c — цена закупки зерна (управляемая переменная модели); $X(c)$ — объем спроса на зерно, обеспечивающий максимум прибыли предприятию; $\underline{c}$ — минимальная цена закупки сырья, при которой на рынок будет поступать предложение $\left(\sum_{i=1}^{I}x_i>0\right)$; $\overline{c}$ — максимальная цена, при которой переработчик получит некоторую норму рентабельности.

Цель функционирования производителя сельскохозяйственной продукции заключается в максимизации прибыли от производства и реализации зерна и выражается целевой функцией $f_i(x_i)$ вида

$$f_i(x_i)=cx_i-z_i(x_i)\to\max_{x_i\in[0,\,a_i\overline{x}_i]},\quad i=1,...,I, \qquad (2)$$

где x_i — объем предложения зерна (управляемая переменная), $z_i(x_i)$ — функция себестоимости произведенной продукции; $\overline{x}_i$ — потенциал производства товарного зерна производителем, который зависит от климатических и почвенных условий сельскохозяйственного производства, обеспеченности сельскохозяйственной техникой и степени ее износа, трудовыми ресурсами, финансовыми ресурсами и прочими производственными факторами; a_i — параметр, характеризующий долю товарного зерна (потенциального предложения) от общего объема производства и учитывающий объем зерна, направленный в счет оплаты труда, на корм скоту и прочие нужды $(0\le a_i\le 1)$.

Исследование экономико-математической модели. Предположим, что в модели (1)–(2) рассматривается только равновесный рынок, т. е. равенство $X(c)=\sum_{i=1}^{I}x_i$ выполнено для $\forall c\in[\underline{c},\overline{c}]$ и $\sum_{i=1}^{I}a_i\overline{x}_i\ge X(c)$, тогда система (1)–(2) представляет собой теоретико-игровую модель следующего вида:

$$F(c)=(d-c)\sum_{i=1}^{I}x_i\to\max_{c\in[\underline{c},\,\overline{c}]}, \qquad (3)$$

$$f_i(x_i)=cx_i-z_i(x_i)\to\max_{x_i\in[0,\,a_i\overline{x}_i]},\quad i=1,2,...,I, \qquad (4)$$

или в общем виде

$$\Gamma=\left\langle I+1,\,F(\cdot),\,f(\cdot),\,C,\,X_1,X_2,...,X_I,\right\rangle.$$

Решение задачи (3)–(4) находится различными методами теории игр, в частности, могут быть исследованы гарантированный результат каждого участника, ситуация равновесия по Нэшу, решение в стратегиях Г1 и Г2. Рассмотрим некоторые из упомянутых вариантов решений.

Найдем решение задачи (3)–(4) в стратегиях Г1. В соответствии с иерархическим взаимодействием первенством в принятии решения обладает переработчик, он устанавливает цену реализации c. Производитель в зависимости от уровня цены формирует предложение $x^*(c)$, обеспечивающее ему максимум прибыли.

Найдем решение $x_i^*(c)$, $i=1,...,I$, задачи (4):

$$\frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i}=c-\frac{\partial z_i(x_i)}{\partial x_i}=0;$$

$$\frac{\partial z_i(x_i)}{\partial x_i}=c.$$

Отсюда получаем общий вид оптимальной зависимости объема предложения зерна от цены $x_i^*=x_i^*(c)$ в условиях монопсонии в модели производителя (4). В целом условие оптимальности свидетельствует, что при высокой конкуренции между производителями зерна и монополии на рынке сбыта реализация продукции осуществляется по себестоимости. Если функция $z_i(x_i)$ линейна относительно x_i, $i=1,...,I$, т. е. имеет вид $z_i(x_i)=b_i^o+b_i^1x_i$, тогда решение линейной оптимизационной задачи (4) достигается при $c < b_i^1$ в точках $x_i^*(c) = 0$ и при $c > b_i^1$ в точках $x_i^*(c) = a_i \bar{x}_i$ $(i = 1,...,I)$.

Проанализируем свойства полученного решения:

а) при увеличении рыночной цены объем предложения возрастает;

б) при цене закупки больше величины прироста затрат на единицу прироста производства $\left(c \geq \dfrac{z_i(x_i)}{x_i}\right)$ прибыль производителя неотрицательна $(f_i(x_i) \geq 0)$.

Подставляя найденную зависимость $x_i^* = x_i^*(c)$ в задачу центра (переработчика) (3), получим:

$$F(c) = (d-c)\sum_{i=1}^{I} x_i^*(c) \to \max_{c\in[\underline{c},\bar{c}]}.$$

Найдем решение полученной задачи:

$$\frac{\partial F(c)}{\partial c} = -\sum_{i=1}^{I} x_i^*(c) + (d-c)\sum_{i=1}^{I}\frac{\partial x_i^*(c)}{\partial c} = 0.$$

Отсюда получаем оптимальное решение $c^* = c^*(d, x_i)$ модели переработчика (3).

Проанализируем свойства полученного решения:

а) при $c^* \leq d$ прибыль переработчика неотрицательна: $F(c^*) \geq 0$;

б) если $\dfrac{\partial x_i^*(c)}{\partial c} = 0$, $i = 1,...,I$, т.е. $x_i^*(c)$ — некоторая постоянная величина, не зависящая от рыночной цены, то переработчик в условиях стабильности и низкой эластичности предложения обеспечивает получение максимальной прибыли $\left(c^* = \underline{c} = \dfrac{\partial z_i(x_i)}{\partial x_i}\right)$; при этом объем предложения не зависит от уровня цен и постоянен.

Найдем равновесное решение системы оптимизационных моделей (3)–(4).

Целевая функция переработчика $F(c)$ линейна относительно c, коэффициент перед c отрицателен, значит, оптимальное значение достигается в точке $c^* = \underline{c}$.

Если функция издержек производителя относительно x_i линейна — $z_i(x_i) = b_i^o + b_i^1 x_i$, $i = 1,...,I$, то оптимальное решение задачи (4) достигается в точках

$$x_i^*(c) = \begin{cases} 0, & (c - b_i^1) \leq 0, \\ a_i \bar{x}_i, & (c - b_i^1) > 0. \end{cases}$$

Если функция издержек производителя $z_i(x_i)$ не является линейной относительно x_i, то оптимальное решение задачи (4) находится из выражения

$$\frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i} = c - \frac{\partial z_i(x_i)}{\partial x_i} = 0.$$

Полученное решение системы моделей (3)–(4) $c^* = \underline{c}$, $x_i^*(c) = \begin{cases} 0, & (c - b_i^1) \leq 0, \\ a_i \bar{x}_i, & (c - b_i^1) > 0. \end{cases}$ является равновесным по Нэшу.

Утверждение. Решение $c^* = \underline{c}$, $x_i^*(c) = \begin{cases} 0, & (c - b_i^1) \leq 0, \\ a_i \bar{x}_i, & (c - b_i^1) > 0, \end{cases}$ $i = 1,...,I$, теоретико-игровой модели (3)–(4) является равновесным по Нэшу, если функция издержек в модели (4) линейна относительно объемов предложения.

Доказательство. Пусть c^* и x_i^*, $i = 1,...,I$, — равновесное по Нэшу решение системы (3)–(4). Тогда выполнены следующие условия:

$$F(c^*, x^*) \geq F(c, x^*), \quad \forall c \in C, \tag{5}$$

$$f_i(c^*, x^*) \geq f_i(c^*, x), \ \forall x_i \in [0, a_i \bar{x}_i]. \tag{6}$$

Из (5) имеем следующее:

$$(d - c^*)\sum_{i=1}^{I} x_i^* \geq (d-c)\sum_{i=1}^{I} x_i^*,$$
$$(c - c^*) \geq 0, \ \forall c \in [\underline{c}, \bar{c}].$$

Учитывая, что $c^* \in [\underline{c}, \bar{c}]$, получаем $c^* = \underline{c}$.

Из (6) имеем следующее:

$$c^* x_i^* - z_i(x_i^*) \geq c^* x_i - z_i(x_i), \forall x_i \in [0, a_i \bar{x}_i],$$
$$c^*(x_i^* - x_i) \geq (z(x_i^*) - z(x_i)),$$
$$c^*(x_i^* - x_i) + (z_i(x_i) - z_i(x_i^*)) \geq 0, \ \forall x_i \in [0, a_i \bar{x}_i].$$

При линейной функции издержек $z_i(x_i) = b_i^o + b_i^1 x_i$ получаем $(c^* - b_i^1)(x_i^* - x_i) \geq 0$, $\forall x_i \in [0, a_i \bar{x}_i]$. Таким образом, для задачи производителя выполнено условие равновесия по Нэшу.

Если $(c^* - b_i^1) \geq 0$, $i = 1,...,I$, то равновесной по Нэшу является точка $x_i^* = a_i \bar{x}_i$, иначе $x_i^* = 0$. Что и требовалось доказать.

Найдем решение задачи (3)–(4), гарантированные результаты переработчика и производителя, согласно основам теории игр с непротивоположными интересами [3]. Гарантированный результат переработчика $\tilde{F}(c)$ определяется как

$$\tilde{F}(c) = \min_{c\in[\underline{c},\bar{c}]} \max_{x_i \in [0, a_i \bar{x}_i], i=1,...,I} F(c) =$$
$$= \min_{c\in[\underline{c},\bar{c}]} \max_{x_i \in [0, a_i \bar{x}_i], i=1,...,I} \left\{(d-c)\sum_{i=1}^{I} x_i\right\} =$$
$$= \min_{c\in[\underline{c},\bar{c}]} \left\{(d-c)\sum_{i=1}^{I} a_i \bar{x}_i\right\} = (d - \bar{c})\sum_{i=1}^{I} a_i \bar{x}_i.$$

Гарантированный результат производителя $\tilde{f}_i(c, x_i)$ определяется как

$$\tilde{f}_i(x_i) = \min_{x_i \in [0, a_i \bar{x}_i]} \max_{c \in [\underline{c}, \bar{c}]} f_i(x_i) =$$
$$= \min_{x_i \in [0, a_i \bar{x}_i]} \max_{c \in [\underline{c}, \bar{c}]} \{ c x_i - z_i(x_i) \} =$$
$$= \min_{x_i \in [0, a_i \bar{x}_i]} \{ c x_i - z_i(x_i) \} = 0.$$

Решение $c^* = \underline{c}$, $x_i^*(c) = \begin{cases} 0, & (c - b_i^1) \le 0, \\ a_i \bar{x}_i, & (c - b_i^1) > 0. \end{cases}$ представляет собой один из вариантов компромиссных решений в модели (3)–(4).

Заключение. Рассмотрена упрощенная экономико-математическая модель рынка зерна — модель локализованного рынка. Проведено исследование модели и найдено решение в стратегиях Г1, равновесное по Нэшу решение, гарантированные результаты участников рынка. Доказано утверждение о равновесном по Нэшу решении в рассматриваемой модели.

Библиографический список

1. Понькина Е.В., Маничева А.С. Некоторые вопросы математического моделирования рассредоточенного рынка зерна // Известия Алт. гос. ун-та. — 2011. — № 1/1 (69).

2. Понькина Е.В., Захарова Ю.А. Модель рассредоточенного рынка при асимметрии распределения транспортных расходов между агентами // Известия Алт. гос. ун-та. — 2013. — № 1/2 (77). DOI:10.14258/izvasu(2013) 1.2-18.

3. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. — М., 1976.