УДК 517.165.7+512.81

О спектрах операторов кривизны некоторых четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой*

П.Н. Клепиков, Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On Curvature Operators Spectra of Some Four-dimensional Lie Groups with Left-invariant Riemannian Metrics

P.N. Klepikov, D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov

Altai State University (Barnaul, Russia)

При исследовании римановых многообразий важную роль играют операторы кривизны: оператор Риччи, оператор одномерной кривизны и оператор секционной кривизны. Изучение их свойств представляет интерес в понимании геометрического и топологического строения однородного риманова многообразия. В частности, представляет интерес отыскать спектры операторов кривизны.

Ранее оператор Риччи и его спектр на группах Ли и однородных пространствах изучался в работах Дж. Милнора, В.Н. Берестовского, А.Г. Кремлева и Ю.Г. Никонорова, а спектры операторов одномерной и секционной кривизн — в исследованиях Д.Н. Оскорбина, Е.Д. Родионова, О.П. Хромовой. Однако в размерности не менее 4 все еще не решен ряд задач, связанных со спектром операторов кривизны на метрических группах Ли. Например, в размерности 4 не найдены точные формулы для вычисления спектра оператора Риччи на метрических группах Ли.

Проблема определения спектров операторов кривизны левоинвариантных римановых метрик на заданной группе Ли является локальной, так как операторы кривизны действуют на алгебре Ли группы Ли. Поэтому естественно переформулировать задачу в терминах метрических алгебр Ли. Именно, определить спектры операторов Риччи, одномерной и секционной кривизн для всевозможных скалярных произведений на заданной алгебре Ли в терминах ее структурных констант.

Ключевые слова: группы Ли, алгебры Ли, операторы кривизны, левоинвариантная риманова метрика, обобщенные базисы Дж. Милнора.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-22

Curvature operators, such as the Ricci operator, a one-dimensional curvature operator and a sectional curvature operator, are important in a study of Riemannian manifolds. Investigation of their properties is interesting for understanding the geometrical and topological structure of homogeneous Riemannian manifolds. In particular, it is interesting to find spectra of the curvature operators.

The Ricci operator and its spectrum on Lie groups and homogeneous spaces was studied by J. Milnor, V.N. Berestovskii, A.G. Kremlev and Yu.G. Nikonorov, and spectra of one-dimensional and sectional curvature operators were studied by D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov, O.P. Khromova. However, the number of problems associated with the spectra of curvatures on metric Lie groups are still not solved in dimension not less than 4. For example, there are no exact formulas for calculating the spectrum of Ricci operator on metric Lie groups in dimension 4.

The problem of spectra calculation for curvature operators of left-invariant Riemannian metrics on given Lie group is local since the curvature operators are defined on Lie algebra of Lie group. It is natural to reformulate the problem in terms of metric Lie algebras. Namely, to calculate the spectra of Ricci, one-dimensional and sectional curvature operators for various scalar products on a given Lie algebra in terms of its structure constants.

Key words: Lie groups, Lie algebras, curvature operators, left-invariant Riemannian metric, J. Milnor's generalized bases.

* Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ 2263.2014.1), Правительства РФ (госконстракт № 14.В25.31.0029), Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

1. Основные определения и обозначения. Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим, соответственно, как $r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \longrightarrow R(X,V)Y)$ и $s = \mathrm{tr}(r)$. Тензор одномерной кривизны $\mathcal{A}$ определим как

$$\mathcal{A} = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right).$$

Оператор Риччи ρ и оператор одномерной кривизны A определим с помощью тождеств

$$g(\rho(X), Y) = r(X,Y),$$
$$g(A(X), Y) = \mathcal{A}(X,Y),$$

где X, Y — векторные поля на M.

Риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в слоях пространства расслоения $\Lambda^2 M$ по правилу

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_i)).$$

Риманову тензору кривизны R, в силу его симметрий, в любой точке многообразия M можно поставить в соответствие оператор секционной кривизны $\mathcal{R}\colon \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M$, определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V) \rangle_x = R_x(X, Y, T, V),$$

где $R_x(X,Y,T,V) = g_x(R(X,Y)T, V)$.

Пусть далее G — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\{\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]\}$ — соответствующая алгебра Ли. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством скалярных произведений в $\mathfrak{g}$ и множеством левоинвариантных римановых метрик в G (см. [1]). Будем обозначать соответствующее скалярное произведение через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и называть пару $\{\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ *метрической алгеброй Ли.*

Фиксируем базис $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ в $\mathfrak{g}$. Положим

$$\begin{aligned} &[E_i, E_j] = C_{ij}^k E_k,\ \nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k, \\ &\langle E_i, E_j \rangle = g_{ij}, \end{aligned} \tag{1}$$

где C_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли; g_{ij} — метрический тензор.

В дальнейшем будем использовать факты и основные обозначения из работ [2–13].

Пусть $C_{ijs} = C_{ij}^k g_{ks}$, тогда символы Кристоффеля первого и второго родов вычисляются, соответственно, по формулам

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(C_{ijk} - C_{jki} + C_{kij}\right),\ \Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks}, \tag{2}$$

где $\|g^{ks}\|$ есть матрица, обратная к $\|g_{ks}\|$.

Тогда формула для вычисления компонент тензора кривизны Римана представима в виде

$$R_{ijkt} = C_{ij}^s \Gamma_{sk,t} - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is,t} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js,t}, \tag{3}$$

компоненты тензора Риччи и скалярную кривизну, соответственно, можно найти как

$$r_{ik} = R_{ijkt} g^{jt}, \quad \rho = r_{ik} g^{ik}. \tag{4}$$

Из (1), (2), (3) и (4) очевидно следует, что операторы Риччи ρ, одномерной кривизны A и секционной кривизны $\mathcal{R}$ являются функциями структурных констант C_{ij}^k и компонент метрического тензора g_{ij}.

2. Спектры операторов кривизны некоторых четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Мы будем использовать классификацию четырехмерных действительных алгебр Ли, полученную Г.М. Мубаракзяновым в работе [14], а также удобные для вычислений базисы (*обобщенные базисы Дж. Милнора*) этих алгебр Ли, построенные в [15, 16]. Сформулируем леммы, фактически доказанные в этих работах.

Лемма 1. *Для произвольного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$ существует $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ортонормированный базис $\{X_i\}$, в котором ненулевые структурные константы имеют следующий вид:*

$$C_{1,2}^1 = a, C_{1,2}^4 = b,\ \text{где } a > 0.$$

Лемма 2. *Для произвольного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$ существует $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ортонормированный базис $\{X_i\}$, в котором ненулевые структурные константы имеют следующий вид:*

$$C_{2,3}^1 = a,\ \text{где } a > 0.$$

Лемма 3. *Для произвольного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$ существует $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ортонормированный базис $\{X_i\}$, в котором ненулевые структурные константы имеют следующий вид:*

$$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = a, C_{3,4}^1 = b,\ \text{где } a > 0.$$

Из всех четырехмерных метрических алгебр Ли рассмотрим только алгебры $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$, так как структурные константы этих алгебр зависят от малого числа параметров.

Теорема. *Спектры оператора одномерной кривизны A, оператора кривизны Риччи ρ, оператора секционной кривизны $\mathcal{R}$ четырехмерных*

Таблица 1

Спектры операторов кривизны четырехмерных метрических алгебр Ли
$\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$

Алгебра Ли	Структурные константы	Спектры операторов
$\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$	$C^1_{1,2} = a$, $C^4_{1,2} = b,\ a > 0$	$spec(A) = \left\{-\frac{1}{3}a^2 - \frac{5}{24}b^2, -\frac{1}{3}a^2 - \frac{5}{24}b^2, \frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{24}b^2, \frac{7}{24}b^2 + \frac{1}{6}a^2\right\}$, $spec(\rho) = \left\{-a^2 - \frac{1}{2}b^2, -a^2 - \frac{1}{2}b^2, 0, b^2\right\}$, $spec(\mathcal{R}) = \left\{-a^2 - \frac{3}{4}b^2, 0, \frac{1}{4}b^2, 0, \frac{1}{4}b^2, 0\right\}$
$\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$	$C^1_{2,3} = a,\ a > 0$	$spec(A) = \left\{-\frac{5}{24}a^2, -\frac{5}{24}a^2, \frac{7}{24}a^2, \frac{1}{24}a^2\right\}$, $spec(\rho) = \left\{-\frac{1}{2}a^2, -\frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}a^2, 0\right\}$, $spec(\mathcal{R}) = \left\{-\frac{3}{4}a^2, \frac{1}{4}a^2, 0, \frac{1}{4}a^2, 0, 0\right\}$
$\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$	$C^1_{1,3} = a$, $C^2_{2,3} = a$, $C^1_{3,4} = b,\ a > 0$	$spec(A) = \left\{-\frac{1}{2}a^2 - \frac{5}{24}b^2, -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{24}b^2, \frac{1}{4}b^2 \pm \frac{1}{4}\sqrt{b^4 + 4a^4 + 5a^2b^2}\right\}$, $spec(\rho) = \left\{-2a^2, -2a^2 - \frac{1}{2}b^2, -a^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^4 + 4a^4 + 5a^2b^2}\right\}$, $spec(\mathcal{R}) = \left\{\frac{1}{4}b^2, \frac{1}{4}b^2, -a^2, -a^2 - \frac{3}{4}b^2, -\frac{1}{2}a(a \pm \sqrt{a^2 + b^2})\right\}$

метрических алгебр Ли $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$, соответствующих группам Ли с левоинвариантной римановой метрикой, имеет вид, представленный в таблице 1.

Доказательство. Вычислим матрицы оператора одномерной кривизны A, оператора кривизны Риччи ρ, оператора секционной кривизны $\mathcal{R}$ в обощенном базисе Дж. Милнора из лемм 1–3 для каждой из метрических алгебр Ли $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$.

Алгебра Ли $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$:

$$A = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{24}b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{24}b^2 + \frac{1}{6}a^2 \end{pmatrix},$$

где $H_1 = -\dfrac{1}{3}a^2 - \dfrac{5}{24}b^2$.

$$\rho = \begin{pmatrix} -a^2 - \frac{1}{2}b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 - \frac{1}{2}b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} -a^2 - \frac{3}{4}b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебра Ли $\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{24}a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{24}a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{24}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24}a^2 \end{pmatrix}.$$

$$\rho = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебра Ли $\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a^2 + \frac{7}{24}b^2 & 0 & 0 & \frac{3}{4}ab \\ 0 & H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 & 0 \\ \frac{3}{4}ab & 0 & 0 & -\frac{5}{24}b^2 + \frac{1}{2}a^2 \end{pmatrix},$$

где $H_2 = -\dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{1}{24}b^2$, $H_3 = -\dfrac{1}{2}a^2 - \dfrac{5}{24}b^2$.

$$\rho = \begin{pmatrix} -2a^2 + \frac{1}{2}b^2 & 0 & 0 & \frac{3}{2}ab \\ 0 & -2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a^2 - \frac{1}{2}b^2 & 0 \\ \frac{3}{2}ab & 0 & 0 & -\frac{1}{2}b^2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}ab & 0 \\ 0 & H_4 & 0 & 0 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & \frac{b^2}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ab & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4}b^2 \end{pmatrix},$$

где $H_4 = -a^2 + \dfrac{b^2}{4}$.

Отметим следующее: так как матрицы операторов являются симметричными, то они всегда имеют действительные собственные значения.

Разберем подробнее случай метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$, так как в обобщенном базисе Дж. Милнора этой алгебры операторы кривизны имеют не диагональный вид. Запишем характеристические многочлены для матриц каждого оператора кривизны.

Характеристический многочлен оператора одномерной A кривизны имеет вид

$$(24x + 12a^2 + 5b^2)(24x + 12a^2 - b^2)\cdot$$
$$\cdot (576x^2 - 48b^2x - 144a^4 - 180a^2b^2 - 35b^4) = 0.$$

Характеристический многочлен оператора Риччи ρ будет иметь вид

$$(x + 2a^2)(2x + 4a^2 + b^2)\cdot$$
$$\cdot (4x^2 + 8a^2x - 5a^2b^2 - b^4) = 0.$$

Характеристический многочлен оператора секционной кривизны $\mathcal{R}$ имеет вид

$$(4x - b^2)^2(x + a^2)(4x + 4a^2 + 3b^2)\cdot$$
$$\cdot (4x^2 + 4a^2x - a^2b^2) = 0.$$

Решая характеристические уравнения каждого оператора, находим их собственные значения. Повторяя вышеприведенную процедуру для оставшихся двух метрических алгебр Ли, получим требуемое.

Замечание. *Из результатов о спектре оператора Риччи, полученных в работе, следуют результаты работ [9, 10] о сигнатурах спектра оператора Риччи соответствующих четырехмерных вещественных алгебр Ли.*

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна : в 2 т. / пер. с англ. — М., 1990.

2. Воронов Д.С., Родионов Е.Д. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // Доклады академии наук. — 2010. — Т. 432, № 3.

3. Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D. Compact Homogeneous Einstein 6-Manifolds // Differential Geometry and its Applications. — 2003. — Т. 19, № 3.

4. Родионов Е.Д. Эйнштейновы метрики на четномерных однородных пространствах, допускающих однородную риманову метрику положительной секционной кривизны // Сиб. матем. журнал. — 1991. — Т. 32, № 3.

5. Родионов Е.Д., Славский В.В. Локально конформно однородные пространства // ДАН. — 2002. — Т. 387, № 3.

6. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О конформно полуплоских 4-мерных группах Ли // Владикавк. матем. журнал. — 2011. — Т. 13, № 3.

7. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. — 2006. — Т. 37.

8. Клепиков П.Н., Хромова О.П. Четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором концикулярной кривизны // Известия Алт. гос. ун-та. — 2014. — № 1/2. DOI 10.14258/izvasu(2014)1.2-05.

9. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. — 2008. — Т. 11, № 2.

10. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. — 2009. — Т. 12, № 1.

11. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. — 2006. — Т. 37.

12. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О спектре оператора кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. — 2013. — Т. 450, № 3.

13. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Мат. труды. — 2006. — Т. 9, № 1.

14. Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Матем. — 1963. — № 1.

15. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Обобщенные базисы Милнора некоторых 4-мерных вещественных метрических алгебр Ли // Избранные труды междунар. конф. «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования», Барнаул, 11–14 ноября 2014. — Барнаул, 2014.

16. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Построение обобщенных базисов Милнора некоторых четырехмерных метрических алгебр Ли // Известия Алт. гос. ун-та. — 2015 — № 1/1 (85). DOI 10.14258/izvasu(2015)1.1-13.