УДК 517.928.7+512.81

Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли*

П.Н. Клепиков, Д.Н. Оскорбин

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Homogeneous Invariant Ricci Solitons on Four-dimensional Lie Groups

P.N. Klepikov, D.N. Oskorbin

Altai State University (Barnaul, Russia)

Важным обобщением эйнштейновых метрик на римановых многообразиях являются солитоны Риччи, впервые рассмотренные Гамильтоном. Солитоны Риччи связаны с решениями уравнения потока Риччи. Однородная риманова метрика на однородном пространстве G/H, удовлетворяющая уравнению солитона Риччи, называется однородным солитоном Риччи. Такие метрики исследованы в работах многих математиков. Классификация однородных солитонов Риччи известна в малых размерностях и не является исчерпывающей.

Известно, что на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой уравнение солитона Риччи не имеет решений в классе левоинвариантных векторных полей. Аналогичный факт известен для унимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой любых конечных размерностей. Однако для неунимодулярных метрических групп Ли размерностей выше трех вопрос существования нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи остается открытым.

В данной статье получен ответ на этот вопрос в размерности 4. При помощи обобщенных базисов Дж. Милнора уравнение однородного солитона Риччи сведено к системе полиномиальных уравнений. Доказано отсутствие нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на четырехмерных метрических группах Ли.

Ключевые слова: группы Ли, алгебры Ли, инвариантный солитон Риччи, левоинвариантная риманова метрика, обобщенные базисы Дж. Милнора.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-21

Ricci solitons are important generalizations of Einstein metrics on Riemann manifolds. These metrics were first investigated by Hamilton. Ricci solitons are relevant to the solutions of the Ricci flow. Homogeneous Riemannian metric on the homogeneous space G/H satisfying the Ricci soliton is called the homogeneous Ricci soliton. Such metrics have been studied by many mathematicians. The classification of homogeneous Ricci solitons is known in small dimensions only, and it is not exhaustive.

It is known that for three-dimensional Lie groups with left-invariant Riemannian metric Ricci soliton equation has no solution in the class of left-invariant vector fields. A similar fact is proved for unimodular Lie groups with left-invariant Riemannian metric of any finite dimension. However, the existence problem for non-trivial invariant Ricci solitons on nonunimodular Lie groups of dimension > 3 remains open.

In this paper, we obtain the solution of this problem in dimension 4. The soliton equation by generalized Milnor's frames reduced to the system of polynomial equations. The absence of non-trivial homogeneous invariant Ricci solitons on four-dimensional Lie groups is proved.

Key words: Lie group, Lie algebra, invariant Ricci soliton, left-invariant Riemannian metric, J. Milnor's generalized bases.

1. Основные определения и обозначения. Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r определим как

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

$r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X,V)Y)$.

Важным обобщением эйнштейновых метрик (см. например [1]) являются солитоны Риччи, которые были впервые рассмотрены Гамильтоном в работе [2].

Определение. Пусть (M,g) — полное риманово многообразие. Метрика g называется *солитоном Риччи*, если она удовлетворяет уравнению

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g, \tag{1}$$

где r — тензор Риччи метрики g; $\Lambda \in \mathbb{R}$; $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то однородная риманова метрика, удовлетворяющая (1), называется *однородным солитоном Риччи*.

Определение. Если риманово многообразие (M,g) есть эйнштейновое многообразие либо изометрично прямому произведению эйнштейнового многообразия и евклидова пространства, то метрика g называется *тривиальным* солитоном Риччи.

Пусть далее $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, а X — левоинвариантное векторное поле, тогда (1) можно переписать в терминах структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$X^k(C^s_{ki}g_{sj} + C^s_{kj}g_{si}) + r_{ij} = \Lambda g_{ij}, \tag{2}$$

где X^k — координаты левоинвариантного векторного поля X; C^k_{ij} — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$; g_{ij} — компоненты метрического тензора; r_{ij} — компоненты тензора Риччи; $\Lambda \in \mathbb{R}$.

Определение. Пусть G — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g. Если метрика g является однородным солитоном Риччи, причем поле X в уравнении (1) левоинвариантно (т. е. g удовлетворяет уравнению (2)), то метрика g называется *однородным инвариантным солитоном Риччи*.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *унимодулярной*, если

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X) \equiv 0, \ \forall X \in \mathfrak{g},$$

где $\mathrm{ad}\, X(Y) = [X,Y]$, для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$.

2. Четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Далее мы рассмотрим четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Мы будем использовать классификацию четырехмерных действительных алгебр Ли, полученную Г.М. Мубаракзяновым в работе [3], а также удобные для вычислений базисы (*обобщенные базисы Дж. Милнора*) этих алгебр Ли, построенные в [4].

Замечание. *Для любой конечномерной унимодулярной группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой система уравнений (2) не имеет решений, отличных от тривиальных (см. [5]).*

Рассмотрим далее все неунимодулярные четырехмерные алгебры Ли и докажем отсутствие нетривиальных решений системы уравнений (2).

Алгебра Ли $2\mathbb{A}_2$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $2\mathbb{A}_2$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&C^2_{1,2} = a, \quad C^2_{1,3} = c, && C^2_{1,4} = -ab,\\
&C^2_{2,3} = d, \quad C^2_{2,4} = af, && C^1_{3,4} = fh,\\
&C^4_{3,4} = h, \quad C^2_{3,4} = b(d+h) + cf,
\end{aligned}$$

где $a > 0$, $h > 0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$\begin{aligned}
(b^2+2)a^2 - f^2h^2 + c^2 + 2\Lambda &= 0,\\
a(b^2d + b^2h - f^2h + 2d) - 2X^4fh &= 0,\\
((d+2X^3)h + 2a^2)f + bc(d+h) &= 0,\\
((2d+h)f - cb)a + 2X^4h &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(b^2 - 2f^2 - 2)a^2 + (-4fX^4 + 4X^1)a +\\
&\quad + (b^2-2)d^2 + (2b^2h + 2h - 4X^3)d +\\
&\qquad + b^2h^2 + c^2f^2 + c^2 - 2\Lambda = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(b^2 + f^2 + 2)h^2 + (2b^2d - 2d - 4X^3)h +\\
&\quad + (a^2+d^2)b^2 + (2a^2+c^2)f^2 + 2\Lambda = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&((2d+2h)X^3 + 2a^2 - 2X^1a + 2d(d+h))b +\\
&\quad + 2f(aX^2 - ch + cX^3) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2a^2f + 2X^4a + fh(d+h))b - 2X^2a -\\
&\quad - (2d - h + 2X^3)c = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(b^2 + f^2 + 2)h^2 + 2b^2dh + b^2d^2 + 2d^2 +\\
&\quad + (f^2+1)c^2 + 2\Lambda = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2(d+h)(af + X^4)b - 2cfX^4 + 2ac -\\
&\quad - 2X^1c - 2X^2d = 0.
\end{aligned}$$

Последовательно исключая Λ и X^i, получаем, что $b = c = d = f = 0$ и $a = h$, что соответствует тривиальному солитону Риччи. Система (2) в случае алгебры Ли $2\mathbb{A}_2$ нетривиальных решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$C^2_{1,2} = a, C^4_{1,2} = b,$$

где $a > 0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$\begin{aligned} 2\Lambda+2a^2+b^2=0, &\quad X^2a=0,\\ 4X^1a-2\Lambda-2a^2-b^2=0, &\quad \Lambda=0,\\ X^2b=0, &\quad X^1b=0,\\ 2\Lambda-b^2=0. & \end{aligned}$$

Из четвертого уравнения следует $\Lambda=0$, а значит из последнего получаем $b=0$. Но тогда первое уравнение дает $a=0$, что противоречит условию $a>0$. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_2\oplus 2\mathbb{A}_1$ решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}_{32}\oplus\mathbb{A}_1$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}_{32}\oplus\mathbb{A}_1$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$C^1_{1,3}=C^2_{2,3}=a, C^1_{2,3}=b, C^1_{3,4}=c, C^2_{3,4}=d,$$

где $a>0$, $b>0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$\begin{aligned} 2b(a+X^3)-dc=0, &\quad aX^2-dX^4=0,\\ c(3a+2X^3)=0, &\quad c^2+d^2+2\Lambda=0,\\ aX^1+bX^2-cX^4=0, &\quad (3a+2X^3)d+bc=0,\\ 4a^2+4aX^3-b^2-c^2+2\Lambda=0,&\\ 4a^2+4aX^3+b^2-d^2+2\Lambda=0,&\\ 4a^2+b^2+c^2+d^2+2\Lambda=0.& \end{aligned}$$

Разность последнего и четвертого уравнений дают $4a^2+b^2=0$, что противоречит условию $a>0$, $b>0$. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{32}\oplus\mathbb{A}_1$ решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}_{33}\oplus\mathbb{A}_1$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}_{33}\oplus\mathbb{A}_1$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$C^1_{1,3}=C^2_{2,3}=a, C^1_{3,4}=b,$$

где $a>0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$4a^2+4aX^3-b^2+2\Lambda=0,$$

$$\begin{aligned} 2a^2+2aX^3+\Lambda=0, &\quad aX^1-bX^4=0,\\ X^2a=0, &\quad 4a^2+b^2+2\Lambda=0,\\ b(3a+2X^3)=0, &\quad b^2+2\Lambda=0. \end{aligned}$$

Разность пятого и последнего уравнений дают $a^2=0$, что противоречит условию $a>0$. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{33}\oplus\mathbb{A}_1$ решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}^{\alpha}_{35}\oplus\mathbb{A}_1$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}^{\alpha}_{35}\oplus\mathbb{A}_1$, $0<|\alpha|<1$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$C^1_{1,3}=a,\ C^1_{2,3}=c,\ C^2_{2,3}=\alpha a,\ C^1_{3,4}=d,\ C^2_{3,4}=b,$$

где $a>0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$\begin{aligned} (2\alpha+2)a^2+4X^3a-c^2-d^2+2\Lambda=0,\\ 2\alpha^2a^2+2a(a+2X^3)\alpha-b^2+c^2+2\Lambda=0,\\ 2a^2(\alpha^2+2)+b^2+c^2+d^2+2\Lambda=0,\\ d(a\alpha+2a+2X^3)=0,\\ ((2\alpha+1)a+2X^3)b+cd=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2c(a+X^3)-bd=0, &\quad aX^1+cX^2-dX^4=0,\\ a\alpha X^2-bX^4=0, &\quad b^2+d^2+2\Lambda=0. \end{aligned}$$

Вычитая последнее уравнение из третьего, получаем

$$2a^2(\alpha^2+2)+c^2=0,$$

что противоречит условию $a>0$. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}^{\alpha}_{35}\oplus\mathbb{A}_1$ решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}^{\alpha}_{37}\oplus\mathbb{A}_1$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}^{\alpha}_{37}\oplus\mathbb{A}_1$, $\alpha>0$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C^1_{1,3}=C^2_{2,3}=a\alpha, &\quad C^2_{1,3}=-\frac{a}{b}, \quad C^1_{2,3}=ab,\\ C^1_{3,4}=bc+d\alpha, &\quad C^2_{3,4}=c\alpha-\frac{d}{b}, \end{aligned}$$

где $a>0$, $b>0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$\begin{aligned} (aX^1-dX^4)\alpha+b(aX^2-cX^4)=0,\\ (\alpha bc-d)X^4-a(\alpha bX^2-X^1)=0,\\ 3a\alpha^2bc+(d(b^2-3)a+2bcX^3)\alpha+ab^3c-2dX^3=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2+c^2)b^4+2\alpha b^3cd+((4a^2+c^2+d^2)\alpha^2-\\ -2a^2+2\Lambda)b^2-2\alpha bcd+a^2+d^2=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2+c^2)b^4+2\alpha b^3cd+((d^2-4a^2)\alpha^2-\\ -4X^3a\alpha-2\Lambda)b^2-a^2=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2bcd+((c^2-2a^2)b^2+2a^2-d^2)\alpha-\\ -2ab^2X^3-bcd+2aX^3=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2b^4+((4a^2-c^2)\alpha^2+4X^3a\alpha+2\Lambda)b^2+\\ +2\alpha bcd-a^2-d^2=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^4c^2+2\alpha b^3cd+((c^2+d^2)\alpha^2+2\Lambda)b^2-\\ -2\alpha bcd+d^2=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3a\alpha+2X^3)cb^3+(3a\alpha+2X^3)\alpha db^2-\\ -a\alpha bc+ad=0. \end{aligned}$$

Вычитая из четвертого предпоследнее уравнение, получим

$$a^2b^2(4\alpha^2b^2 + (b^2-1)^2) = 0,$$

что противоречит ограничениям на структурные константы и параметры алгебры Ли. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{37}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$ решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,2}^{\beta}$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,2}^{\beta}$, $\beta \neq 0$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$C_{1,4}^1 = a\beta, C_{2,4}^1 = (1-\beta)ad, \quad C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = a,$$
$$C_{3,4}^1 = ((1-\beta)e + d)ac, \qquad C_{3,4}^2 = ac,$$

где $a > 0$, $c > 0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$ac(\beta e - d - e)(2a\beta + a + 2X^4) = 0,$$
$$(((\beta-1)d^2 - e(\beta-1)^2d - \beta - 2)a - 2X^4)ac = 0,$$
$$(c(d + e - \beta e)X^3 + (X^1 - dX^2)\beta + dX^2)a = 0,$$
$$a(cX^3 + X^2) = 0, \quad X^3a = 0,$$
$$((c^2e^2 + d^2 - 2)\beta^2 - (2e(d+e)c^2 + 2d^2 + 4)\beta + \\ + c^2(d+e)^2 + d^2)a^2 - 4X^4a\beta - 2\Lambda = 0,$$
$$(((2\beta^2 + c^2 - \beta - 1)d - c^2e(\beta-1))a + \\ + 2dX^4(\beta-1))a = 0,$$
$$(c^2 - \beta^2d^2 + (2d^2-2)\beta - d^2 - 4)a^2 - \\ - 4X^4a - 2\Lambda = 0,$$
$$((2d(\beta-1)e - (\beta-1)^2e^2 - d^2 - 1)c^2 - \\ - 2\beta - 4)a^2 - 4X^4a - 2\Lambda = 0,$$
$$((2e(d+e)\beta - \beta^2e^2 - d^2 - 2de - e^2 - 1)c^2 - \\ - (d^2+2)\beta^2 + 2\beta d^2 - d^2 - 4)a^2 - 2\Lambda = 0.$$

Рассмотрим первое уравнение. Оно, с учетом $a > 0$, $c > 0$, дает нам два возможных варианта:
Если $d = e(\beta-1)$, то из второго уравнения следует, что $X^4 = -\frac{1}{2}a(\beta+2)$. Но тогда из остальных уравнений системы следует $a^2c^2 = 0$, что невозможно в силу ограничений на структурные константы.
Если $X^4 = -\frac{1}{2}a(2\beta+1)$, то из седьмого уравнения следует, что $d = e(\beta-1)$. Далее из второго уравнения получаем $\beta = 1$, но тогда остальные уравнения системы снова дают $a^2c^2 = 0$. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,2}^{\beta}$ решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,3}$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,3}$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$C_{1,4}^1 = a, \ C_{2,4}^1 = b, \ C_{3,4}^1 = c, \ C_{3,4}^2 = d,$$

где $a > 0$, $d > 0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$2X^4b - dc + 2ab = 0, \qquad 2\Lambda + b^2 - d^2 = 0,$$
$$c(a + X^4) = 0, \quad 2X^4d + bc + ad = 0,$$
$$2\Lambda + c^2 + d^2 = 0, \qquad dX^3 = 0,$$
$$4X^4a + 2\Lambda - b^2 - c^2 + 2a^2 = 0,$$
$$aX^1 + bX^2 + cX^3 = 0,$$
$$2\Lambda + 2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0.$$

Из пятого уравнения получаем, что $\Lambda = -\frac{1}{2}(c^2 + d^2)$. Но тогда последнее уравнение дает $2a^2 + b^2 = 0$, что невозможно, так как $a > 0$. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,3}$ решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,4}$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,4}$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = a, \ C_{2,4}^1 = b,$$

$$C_{3,4}^1 = c, \ C_{3,4}^2 = d,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$c^2 - 4X^4a - 2\Lambda + b^2 - 6a^2 = 0,$$
$$d^2 - 4X^4a - 2\Lambda - b^2 - 6a^2 = 0,$$
$$4X^4a + 2\Lambda + c^2 + 6a^2 + d^2 = 0,$$
$$2\Lambda + 6a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0,$$

$$dc - 2X^4b - 3ab = 0, \qquad c(2X^4 + 3a) = 0,$$
$$2X^4d + bc + 3ad = 0, \quad aX^1 + bX^2 + cX^3 = 0,$$
$$aX^2 + dX^3 = 0, \qquad X^3a = 0.$$

Заметим, что если сложить первое и третье уравнения, то получим $b^2 + 2c^2 + d^2 = 0$, что невозможно, так как $b > 0$ и $d > 0$. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,4}$ решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$, $\alpha\beta \neq 0$, $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$C_{1,4}^1 = a, \ C_{2,4}^1 = ab(\alpha-1), \ C_{2,4}^2 = \alpha a,$$
$$C_{3,4}^2 = ad(\alpha-\beta), \ C_{3,4}^3 = \beta a,$$
$$C_{3,4}^1 = a(bd(\alpha-1) + c(\beta-1)),$$

где $a > 0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$(\alpha bd - bd + \beta c - c)(a\alpha + 2a + 2X^4) = 0,$$
$$(bd(\alpha-1) + c(\beta-1))X^3 + X^2(\alpha-1)b + X^1 = 0,$$
$$\alpha dX^3 - \beta dX^3 + \alpha X^2 = 0, \quad X^3\beta a = 0,$$

$$((\alpha-1)^2(d^2+1)b^2+(2(\beta-1))(\alpha-1)dcb+$$
$$+(\beta-1)^2c^2-2\alpha-2\beta-2)a^2-4X^4a-2\Lambda=0,$$
$$((1-\alpha)((\beta-\alpha)d^2+\beta+2)b-$$
$$-cd(\beta-1)(\beta-\alpha))a-2bX^4(\alpha-1)=0,$$
$$((-b^2+d^2-2)\alpha^2+(-2\beta d^2+2b^2-2\beta-2)\alpha$$
$$+\beta^2d^2-b^2)a^2-4X^4a\alpha-2\Lambda=0,$$
$$(((b^2+2)\alpha^2+(-2b^2-2\beta+1)\alpha+b^2-\beta)d+$$
$$+bc(\alpha-1)(\beta-1))a-2dX^4(\beta-\alpha)=0,$$
$$((\alpha-1)^2b^2d^2+(2\beta-2)(\alpha-1)dcb+$$
$$+(\beta-1)^2c^2+(\alpha-\beta)^2d^2+$$
$$+2\beta(\alpha+\beta+1))a^2+4X^4\beta a+2\Lambda=0,$$
$$((\alpha-1)^2(d^2+1)b^2+(2\beta-2)(\alpha-1)dcb+$$
$$+(\beta-1)^2c^2+(\alpha-\beta)^2d^2+2\alpha^2+$$
$$+2\beta^2+2)a^2+2\Lambda=0.$$

Первое уравнение дает нам три случая:
Пусть $X^4=-\frac{1}{2}a(\alpha+2)$. Но тогда из остальных уравнений системы следует

$$(\alpha-1)^2b^2+2\alpha^2+2(\beta+2)=0,$$

что невозможно в силу ограничений на параметры алгебры Ли.
Пусть $c=-\frac{bd(\alpha-1)}{\beta-1}$. Тогда либо получаем тривиальный солитон Риччи при $b=d=0$, $\alpha=\beta=1$; либо $a^2(d^2+1)(2\alpha^2+1)^2=0$, что невозможно, так как $a>0$.
Пусть $\beta=1$. Тогда $b=d=0$, $\alpha=1$ и снова получаем тривиальный солитон Риччи. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ нетривиальных решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$, $\alpha\neq 0$, $\beta\geqslant 0$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$C_{1,4}^1=\alpha a,\quad C_{2,4}^1=c,\quad C_{2,4}^2=C_{3,4}^3=\beta a,$$
$$C_{2,4}^3=-\frac{a^2}{b},\quad C_{3,4}^1=d,\quad C_{3,4}^2=b,$$

где $a>0$, $b>0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$(2\alpha^2+4\alpha\beta)a^2+4X^4a\alpha-c^2-d^2+2\Lambda=0,$$
$$((\beta+2\alpha)a+2X^4)c-bd=0,$$
$$b^4+((2\alpha^2+4\beta^2-2)a^2+c^2+d^2+2\Lambda)b^2+a^4=0,$$
$$((2\alpha\beta+4\beta^2)a^2+4X^4\beta a+c^2+2\Lambda)b^2+a^4=b^4,$$
$$((2\alpha\beta+4\beta^2)a^2+4X^4\beta a+d^2+2\Lambda)b^2+b^4=a^4,$$
$$a^2c+bd(\beta+2\alpha)a+2X^4db=0,\quad aX^2-b\beta X^3=0,$$
$$a\alpha X^1+cX^2+dX^3=0,\quad a\beta X^2+bX^3=0,$$
$$(2\beta+\alpha)a^3+2a^2X^4-b^2(2\beta+\alpha)a-$$
$$-2b^2X^4-bcd=0.$$

Пусть $d\neq 0$, тогда $X^4=-\frac{a(bd(\beta+2\alpha)+ac)}{2bd}$. Но тогда из второго уравнения получаем $a^2c^2+b^2d^2=0$, что невозможно в силу ограничений на структурные константы.
Пусть $d=0$. Тогда из второго уравнения системы получаем, что либо $c=0$, $a=b$, $\alpha=\beta$, что соответствует тривиальному солитону Риччи; либо $c=0$ и $X^4=-\frac{1}{2}(2\beta+\alpha)a$, откуда получаем $(\alpha^2+2\beta^2)(a^2+b^2)=0$, что невозможно. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$ нетривиальных решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,7}$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,7}$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$C_{1,4}^1=2a,\quad C_{2,4}^2=C_{3,4}^3=a,\quad C_{2,3}^1=b,$$
$$C_{2,4}^1=c,\quad C_{3,4}^1=d,\quad C_{3,4}^2=e,$$

где $a>0$, $b>0$, $e>0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$d^2-8X^4a-2\Lambda+b^2+c^2-16a^2=0,$$
$$2X^3b+2X^4c-ed+5ac=0,$$
$$e^2-4X^4a-2\Lambda-b^2-c^2-8a^2=0,$$
$$2X^2b-2X^4d-5ad=0,$$
$$4X^4a+2\Lambda+b^2+d^2+8a^2+e^2=0,$$
$$2\Lambda+12a^2+c^2+d^2+e^2=0,$$

$$2X^4e+cd+4ae=0,\quad 2aX^1+cX^2+dX^3=0,$$
$$2X^2a+2X^3e+bd=0,\qquad 2X^3a-bc=0.$$

Последовательно исключая из системы Λ и X^i, необходимо получаем, что $c=d=0$. Но тогда разность третьего и пятого уравнений дают $e^2=0$, что невозможно в силу ограничений на структурные константы. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,7}$ решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$, $-1<\beta\leqslant 1$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$C_{1,4}^1=a(\beta+1),\quad C_{2,3}^1=b,\quad C_{2,4}^1=c,\quad C_{2,4}^2=a,$$
$$C_{3,4}^2=f(\beta-1),\quad C_{3,4}^1=d,\quad C_{3,4}^3=a\beta,$$

где $a>0$, $b>0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$
\begin{gathered}
(3a\beta+2a+2X^4)c-fd\beta+2X^3b+fd=0,\\
((3+2\beta)a+2X^4)d-2X^2b=0,\\
(\beta-1)(a\beta+3a+2X^4)f+cd=0,\\
a\beta X^1+aX^1+cX^2+dX^3=0,\\
4a^2(\beta+1)^2+4X^4a(\beta+1)-b^2-d^2+2\Lambda=c^2,\\
2X^3f(\beta-1)+2X^2a+bd=0,\quad 2a\beta X^3=bc,\\
(4a^2+2f^2)\beta+4a^2+4X^4a+b^2+c^2-\\
-f^2-\beta^2f^2+2\Lambda=0,\\
(4a^2+f^2)\beta^2+(4a^2+4aX^4-2f^2)\beta+\\
+b^2+d^2+f^2+2\Lambda=0,\\
(4a^2+f^2)\beta^2+(4a^2-2f^2)\beta+4a^2+\\
+c^2+d^2+f^2+2\Lambda=0.
\end{gathered}
$$

Последовательно исключая Λ и X^i, получаем, что $c=d=f=0$. Но тогда либо $\beta=1$ и $b=2a$, что дает тривиальный солитон Риччи; либо $a^2(\beta^2+\beta+1)=0$, что невозможно в силу ограничений на структурные константы. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}^{\beta}_{4,9}$ нетривиальных решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}^{\alpha}_{4,11}$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}^{\alpha}_{4,11}$, $\alpha>0$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&C^1_{1,4}=2a\alpha, && C^1_{2,3}=b, && C^1_{2,4}=c,\\
&C^2_{2,4}=C^3_{3,4}=a\alpha, && C^3_{2,4}=-\frac{a}{f}, && C^1_{3,4}=d,\\
&C^2_{3,4}=af,
\end{aligned}
$$

где $a>0$, $b>0$, $f>0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$
\begin{gathered}
16a^2\alpha^2+8a\alpha X^4-b^2-c^2-d^2+2\Lambda=0,\\
5a\alpha c-adf+2bX^3+2cX^4=0,\\
(5a\alpha d-2bX^2+2dX^4)f+ac=0,\\
(4\alpha f^2-4\alpha)a^2+(2f^2X^4-2X^4)a+cdf=0,\\
2a\alpha X^1+cX^2+dX^3=0,\\
2a\alpha X^2+2afX^3+bd=0,\\
2a\alpha fX^3-bcf-2aX^2=0,\\
a^2f^4+((12\alpha^2-2)a^2+c^2+d^2+2\Lambda)f^2+a^2=0,\\
a^2f^4-(8a^2\alpha^2+4a\alpha X^4+b^2+c^2+2\Lambda)f^2=a^2,\\
a^2f^4+(8a^2\alpha^2+4a\alpha X^4+b^2+d^2+2\Lambda)f^2=a^2.
\end{gathered}
$$

Пусть $c\neq 0$, тогда, поочередно выражая Λ и X^i, получаем

$$
\begin{gathered}
a^2\alpha^2d^2f^2+a^2\alpha^2c^2+a^2d^2f^2+\\
+b^2c^2f^2+a^2c^2+b^2d^2=0,
\end{gathered}
$$

что невозможно в силу ограничений на структурные константы.

Пусть $c=0$. Тогда получаем, что либо $f=1$, $d=0$ и $b=2a\alpha$, что соответствует тривиальному солитону Риччи; либо $X^4=-2a\alpha$ и $d=0$, $f=1$, что влечет $b^2=0$, что невозможно. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}^{\alpha}_{4,11}$ нетривиальных решений не имеет.

Алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,12}$.

Пусть $\{x_i\}$ — обобщенный базис Дж. Милнора алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,12}$, тогда ненулевые структурные константы имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&C^1_{1,3}=C^2_{2,3}=a, && C^2_{1,4}=-c, && C^1_{2,4}=d,\\
&C^1_{1,4}=C^2_{2,4}=b, && C^1_{3,4}=f, && C^2_{3,4}=h,
\end{aligned}
$$

где $a>0$, $c>0$, $d>0$.

В этом базисе система (2) имеет вид

$$
\begin{gathered}
4a^2+4aX^3+4b^2+4bX^4+c^2-d^2-f^2+2\Lambda=0,\\
2bc-2bd+2cX^4-2dX^4+fh=0,\\
4a^2+4aX^3+4b^2+4bX^4-c^2+d^2-h^2+2\Lambda=0,\\
3af+2bX^1+2dX^2+2fX^3=0,\\
3ah+2bX^2-2cX^1+2hX^3=0,\\
4b^2+c^2-2cd+d^2+f^2+h^2+2\Lambda=0,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&2aX^1-3bf+ch=2fX^4, && 4a^2+f^2+h^2=-2\Lambda,\\
&2aX^2-3bh-df=2hX^4, && ab=0.
\end{aligned}
$$

Из последнего уравнения, с учетом $a>0$, получаем, что $b=0$. Далее из восьмого и шестого уравнений получаем, что $c=d\pm 2a$. Последовательно исключая из уравнений X^i, необходимо получаем $f=h=0$. Но тогда из первого и второго уравнений получаем $a(a+d)=0$, что невозможно, так как $a>0$ и $d>0$. Система (2) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,12}$ решений не имеет.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Пусть G — четырехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g. Тогда на G не существует нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи.*

Далее рассмотрим алгебраические солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Оператор Риччи ρ определим равенством $g(\rho(X),Y)=r(X,Y)$, где X,Y — левоинвариантные векторные поля на группе Ли G с левоинвариантной римановой метрикой g.

Определение. *Группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой g и метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ называется алгебраическим солитоном Риччи, если метрика g в некотором ортобазисе удовлетворяет уравнению*

$$\rho(g)=\Lambda\cdot I+D, \tag{3}$$

Таблица 1

Алгебраические солитоны Риччи на 4-мерных конформно плоских группах Ли

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$	Структурные константы	Λ	$D \in Der(\mathfrak{g})$
$\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$	$c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = a (a > 0)$	$-2a^2$	$diag(0, 0, 0, 2a^2)$
$\mathbb{A}^{\alpha}_{3,7} \oplus \mathbb{A}_1$	$c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = a,\ c^1_{2,3} = -c^2_{1,3} = b,\ a, b > 0$	$-2a^2$	$diag(0, 0, 0, 2a^2)$
$\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$	$c^2_{1,3} = -c^3_{1,2} = -c^1_{2,3} = a,\ a > 0$	$\frac{a^2}{2}$	$diag(0, 0, 0, -\frac{a^2}{2})$

где $\rho(g)$ — матрица оператора Риччи; $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа; I — единичная матрица; D — матрица оператора некоторого дифференцирования алгебры $\mathfrak{g}$.

Классификация нетривиальных алгебраических солвсолитонов Риччи на 4-мерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой, играющих важную роль при классификации однородных солитонов Риччи на разрешимых метрических группах Ли, получена J. Lauret [6]. С помощью обобщенных базисов Дж. Милнора четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой можно получить, в дополнение к результатам J. Lauret, описание алгебраических солитонов Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой в терминах структурных констант алгебр Ли. Ограничимся случаем конформно плоских групп Ли [7]. Для других четырехмерных метрических групп Ли доказательство проводится аналогично.

Теорема. *Левоинвариантная риманова метрика на четырехмерной конформно плоской группе Ли G является алгебраическим солитоном Риччи в случаях, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G входит в таблицу 1.*

Для доказательства теоремы будем использовать сведения из работы [7], содержащие структурные константы конформно плоских метрических алгебр Ли в обобщенных базисах Дж. Милнора. Кроме того, из определения алгебраического солитона вытекает, что матрица дифференцирования в уравнении (3) должна быть симметричной, поэтому в каждом из случаев будем находить только симметричные дифференцирования соответствующих алгебр Ли.

Рассмотрим метрическую алгебру Ли $\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$. Согласно работе [7], ее ненулевые структурные константы имеют вид

$$c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = a, a > 0.$$

Прямые вычисления показывают, что ее симметричные дифференцирования в приведенном выше базисе имеют вид

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & 0 & 0 \\ z_2 & z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{pmatrix} \mid z_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

В приведенном выше базисе система уравнений (3) имеет вид

$$-2a^2 - z_1 - C = 0$$
$$-2a^2 - z_3 - C = 0$$
$$z_2 = 0$$
$$-2a^2 - C = 0$$
$$-z_4 - C = 0$$

Отсюда $C = -2a^2$ и матрица оператора дифференцирования имеет вид $D = diag(0, 0, 0, 2a^2)$.

Рассмотрим метрическую алгебру Ли $\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$. Согласно работе [7], ее ненулевые структурные константы имеют вид

$$c^1_{2,3} = a, c^2_{1,3} = -a, a > 0.$$

Прямые вычисления показывают, что ее симметричные дифференцирования в приведенном выше базисе имеют вид $D = \{diag(z_1, z_1, 0, z_2) \mid z_i \in \mathbb{R}\}$.

Отметим, что в приведенном выше базисе оператор Риччи тривиален, система уравнений (3) имеет вид $D = -C \cdot I$, и имеет единственное тривиальное решение $C = 0$, $D = 0$.

Рассмотрим метрическую алгебру Ли $\mathbb{A}^{\alpha}_{3,7} \oplus \mathbb{A}_1$. Согласно работе [7], ее ненулевые структурные константы имеют вид

$$c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = a,\ c^1_{2,3} = -c^2_{1,3} = b,\ a > 0,\ b > 0.$$

Прямые вычисления показывают, что ее симметричные дифференцирования в приведенном выше базисе имеют вид $D = \{diag(z_1, z_1, 0, z_2) \mid z_i \in \mathbb{R}\}$.

В приведенном выше базисе система уравнений (3) имеет вид

$$2a^2 + C + z_1 = 0,\ 2a^2 + C = 0,\ z_2 + C = 0.$$

Очевидно, что система имеет единственное решение $C = -z_2 = -2a^2$, $z_1 = 0$.

Рассмотрим метрическую алгебру Ли $\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$. Согласно работе [7], ее ненулевые структурные константы имеют вид

$$c^2_{1,3} = -c^3_{1,2} = -c^1_{2,3} = a\sqrt{1+m^2},$$

$$c^1_{2,4} = -c^2_{1,4} = am\sqrt{1+m^2}, a > 0.$$

Прямые вычисления показывают, что ее симметричные дифференцирования в приведенном выше базисе имеют вид

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} \mid z \in \mathrm{R} \right\}.$$

В приведенном выше базисе система уравнений (3) имеет вид

$$zm = 0, \; z + C = 0, \; a^2b^2 + a^2 - 2C = 0.$$

Очевидно, что система имеет единственное решение $m = 0$, $C = -z = \frac{1}{2}a^2$.

Рассмотрим метрическую алгебру Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$. Согласно работе [7], ее ненулевые структурные константы имеют вид

$$c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = a, \alpha = \beta = 1, a > 0.$$

Прямые вычисления показывают, что ее симметричные дифференцирования в приведенном выше базисе имеют вид

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & 0 \\ z_2 & z_4 & z_5 & 0 \\ z_3 & z_5 & z_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

В приведенном выше базисе система уравнений (3) имеет вид

$$3a^2 + C + z_1 = 0, 3a^2 + C + z_4 = 0,$$
$$3a^2 + C + z_6 = 0, 3a^2 + C = 0, z_3 = z_5 = 0.$$

Очевидно, что система имеет единственное решение $z_i = 0$, $C = -3a^2$.

Рассмотрим метрическую алгебру Ли $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$. Согласно работе [7], ее ненулевые структурные константы имеют вид

$$c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = a, \; c_{3,4}^2 = -c_{2,4}^3 = b,$$

$$a > 0, \; b > 0.$$

Прямые вычисления показывают, что ее симметричные дифференцирования в приведенном выше базисе имеют вид

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

В приведенном выше базисе система уравнений (3) имеет вид

$$3a^2 + C + z_1 = 0, \; 3a^2 + C + z_2 = 0, \; 3a^2 + C = 0.$$

Очевидно, что система имеет единственное решение $z_1 = z_2 = 0$, $C = -3a^2$.

Рассмотрим метрическую алгебру Ли $\mathbb{A}_{4,12}$. Согласно работе [7], ее ненулевые структурные константы имеют вид

$$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = a, c_{2,4}^1 = -c_{1,4}^2 = b, c_{2,3}^1 = -c_{1,3}^2 = c,$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Прямые вычисления показывают, что ее симметричные дифференцирования в приведенном выше базисе имеют вид

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

В приведенном выше базисе система уравнений (3) имеет вид

$$2a^2 + 2b^2 + C + z = 0, \; 2a^2 + 2b^2 + C = 0, \; C = 0.$$

Из второго и третьего уравнений получаем $a^2 + b^2 = 0$, что противоречит условию $a > 0$. Значит, в данном случае система уравнений (3) решений не имеет. Теорема доказана.

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна : в 2 т. / пер. с англ. — М., 1990.

2. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. — 1988. — V. 71.

3. Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Известия вузов. — 1963. — № 1.

4. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Обобщенные базисы Милнора некоторых 4-мерных вещественных метрических алгебр Ли // Избранные труды междунар. конф. «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаметальные проблемы науки и образования», Барнаул, 11–14 ноября 2014. — Барнаул, 2014.

5. Luca Di Cerbo Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. — 2014. — V. 14 (2).

6. J. Lauret. Ricc soliton solvmanifolds // J. Reine Angew. Math. — 2011. — V. 650.

7. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О конформно полуплоских 4-мерных группах Ли // Владикавк. матем. журнал. — 2011. — Т. 13, № 3.