УДК 517.9

Двухслойные течения жидкостей с испарением на границе раздела при наличии аномального термокапиллярного эффекта*

О.Н. Гончарова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Two-Layer Fluid Flows with Evaporation at an Interface in the Presence of an Anomalous Thermocapillary Effect

O.N. Goncharova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Математическое моделирование стационарных конвективных течений с испарением на границе раздела проводится с помощью точных решений системы уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска в двумерном случае. При этом в газопаровом слое учитываются эффекты термодиффузии и диффузионной теплопроводности. Расход газа в верхнем слое считается заданной величиной. На твердых непроницаемых границах канала выполняются условия прилипания для вектора скорости. Нижняя граница предполагается теплоизолированной, а на верхней — определен постоянный поток тепла. На прямолинейной границе раздела, предполагаемой термокапиллярной поверхностью, выполняются кинематическое и динамические условия, условия переноса тепла и баланса массы. Концентрация насыщенного пара определяется как следствие уравнения Клапейрона-Клаузиуса. При этом выполнено условие нулевого потока пара на верхней твердой границе канала. Построенные точные решения могут быть применены для моделирования течений в двухслойной системе жидкости и газа в случае, когда жидкость обладает свойством аномального термокапиллярного эффекта.

Ключевые слова: математическая модель, граница раздела, испарение, точное решение, аномальный термокапиллярный эффект.

Mathematical modeling of stationary convective flows with evaporation at an interface is carried out with the help of the exact solutions of the Boussinesq approximation of the Navier-Stokes equations for the two-dimensional case. The effects of thermodiffusion and diffusive heat conductivity in the gas-vapor layer are taken into consideration. The gas flow rate in the upper layer of the system is considered as a given. At the fixed impermeable walls of the channel the no-slip conditions for the velocity vector are fulfilled. The lower rigid boundary is assumed to be a heat insulated boundary. The constant heat flux is defined at the upper boundary of the channel. On the straight interface, being a thermocapillary boundary, the kinematic and dynamic conditions, the condition of heat transfer and the mass balance equations are satisfied. The vapor concentration saturation is defined as a sequence of the Clapeyron-Clausius equation, and a condition of zero vapor flux is assumed to be fulfilled at the upper rigid boundary. The constructed exact solutions can be applied for modeling of flows in two-layer gas-liquid system for the case when a liquid has a property of the anomalous thermocapillary effect.

Key words: mathematical model, interface, evaporation, exact solution, anomalous thermocapillary effect.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-18

Введение. Математическое моделирование стационарных двухслойных течений жидкости и газа с учетом испарения через термокапиллярную границу раздела проводится на основе точных решений уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска (см. также [1, 2]). Данные решения имеют такой вид, когда только продольная компонента скорости отлична от нуля и зависит от поперечной координаты, а распределение температуры и давление в верхнем и нижнем слое, а также концентрация пара имеют линейную относительно продольной координаты составляющую. Продольные градиенты температуры и концентрации пара линейно зависят от поперечной координаты, а зависимость продольного градиента давления от поперечной координаты представляет собой квадратичную зависимость. Одной из первых работ, посвященных постро-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-00163).

ению точного решения в бесконечном горизонтальном канале с испарением на границе раздела «жидкость-жидкость» (без учета термокапиллярности границы раздела), является работа [3]. Построенное в [3] точное решение использовалось также для моделирования течений с учетом диффузии легкой компоненты на границе раздела.

Процитированные здесь решения являются решениями типа Бириха [4] или его обощениями. Точное решение уравнений конвекции Обербека-Буссинека построено в [4] для описания стационарной конвекции жидкости в бесконечной горизонтальной полосе с твердыми непроницаемыми границами или имеющей недеформируемую свободную границу, находящейся в поле силы тяжести, а также под действием постоянного продольного градиента температуры (см. также [5–7]). Следует отметить, что впервые подобная задача была изучена в [8].

В данной работе в верхнем газо-паровом слое учитываются эффекты Соре и Дюфура [9, 10], а на верхней твердой границе рассматривается условие для концентрации пара, выражающее отсутствие потока пара. Построенные точные решения могут быть применены для моделирования течений в двухслойной ситеме жидкости и газа в случае, когда жидкость обладает свойством аномального термокапиллярного эффекта.

1. Постановка задачи. Пусть система двух вязких несжимаемых жидкостей (жидкости и смеси газа и пара) заполняет бесконечные горизонтальные слои, имеющие твердые верхнюю и нижнюю границы $y = h,\ y = -l$, и границу раздела $y = 0$. Система уравнений для нахождения скорости (u, v), температуры T, концентрации C и давления p в стационарном случае записывается в следующем виде:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big),$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} +$$

$$+\nu\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big) + g(\beta T + \underline{\gamma C}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \chi\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \underline{\delta\big(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\big)}\Big),$$

$$u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} = D\Big(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} +$$

$$+\alpha\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\Big)\Big). \tag{1}$$

Здесь p' — модифицированное давление (отклонение от гидростатического давления; $p' = p - \rho\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{x}$; ρ — плотность (некоторое относительное значение плотности); ν — коэффициент кинематической вязкости; χ — коэффициент температуропроводности; D — коэффициент диффузии пара в газе; β — коэффициент теплового расширения; γ — концентрационный коэффициент плотности, коэффициенты δ и α характеризуют эффекты Дюфура и Соре соответственно. Система координат (x, y) выбрана таким образом, что вектор силы тяжести g направлен противоположно оси Oy ($\mathrm{g} = (0, -g)$). Заметим, что подчеркнутые снизу слагаемые и уравнение для концентрации пара в (1) рассматриваются при моделировании течения в верхнем слое.

Пусть решение системы уравнений (1) для жидкости в нижнем слое и системы уравнений для смеси газа и пара в верхнем слое имеет вид

$$u_i = u_i(y),\ \ v_i = 0,$$

$$T_i = (a_1^i + a_2^i y)x + \vartheta_i(y),\ \ C = (b_1 + b_2 y)x + \phi(y). \tag{2}$$

Здесь индекс $i = 1$ отвечает жидкости, заполняющей нижний слой, а индекс $i = 2$ — смеси газа и пара в верхнем слое.

Точные решения вида (2) системы уравнений (1) можно представить следующим образом:

$$u_1 = \frac{y^4}{24}\frac{g\beta_1 a_2^1}{\nu_1} + \frac{y^3}{6}\frac{g\beta_1 A}{\nu_1} + \frac{y^2}{2}c_1 + yc_2 + c_3.$$

$$T_1 = (A + a_2^1 y)x + \frac{y^7}{1008}\Big(\frac{g\beta_1 (a_2^1)^2}{\nu_1\chi_1}\Big) +$$

$$+\frac{y^6}{144}\Big(\frac{g\beta_1 A a_2^1}{\nu_1\chi_1}\Big) + \frac{y^5}{120}\frac{1}{\chi_1}\Big(\frac{g\beta_1 (A)^2}{\nu_1} + 3a_2^1 c_1\Big) +$$

$$+\frac{y^4}{24}\frac{1}{\chi_1}(Ac_1 + 2a_2^1 c_2) + \frac{y^3}{6}\frac{1}{\chi_1}(Ac_2 + a_2^1 c_3) +$$

$$+\frac{y^2}{2}\frac{A}{\chi_1}c_3 + y\,c_4 + c_5,$$

$$p_1' = \Big(\frac{y^2}{2}\rho_1 g\beta_1 a_2^1 + y\rho_1 g\beta_1 A + \nu_1\rho_1 c_1\Big)x +$$

$$+\frac{y^8}{8}k_7 + \frac{y^7}{7}k_6 + \frac{y^6}{6}k_5 + \frac{y^5}{5}k_4 + \frac{y^4}{4}k_3 +$$

$$+\frac{y^3}{3}k_2 + \frac{y^2}{2}k_1 + yk_0 + c_8,$$

$$u_2 = \frac{y^4}{24}\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \frac{y^3}{6}\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1) +$$

$$+\frac{y^2}{2}\overline{c}_1 + y\overline{c}_2 + \overline{c}_3,$$

$$T_2 = (A + a_2^2 y)x + \frac{y^7}{1008} B_2 \frac{g}{\nu_2}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) +$$

$$+\frac{y^6}{720}\Big[B_1 \frac{g}{\nu_2}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + 4B_2 \frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big] +$$

$$+\frac{y^5}{120}\Big[B_1 \frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1) + 3B_2 \overline{c}_1\Big] +$$

$$\frac{y^4}{24}[B_1 \overline{c}_1 + 2B_2 \overline{c}_2] + \frac{y^3}{6}[B_1 \overline{c}_2 + B_2 \overline{c}_3] +$$

$$+\frac{y^2}{2} B_1 \overline{c}_3 + y\overline{c}_4 + \overline{c}_5,$$

$$C = (b_1 + b_2 y)x +$$

$$+\frac{y^7}{1008}\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2)\Big\{\frac{b_2}{D} - \alpha B_2\Big\} +$$

$$+\frac{y^6}{720}\frac{g}{\nu_2}\Big\{\Big[\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big](\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) +$$

$$+4\Big[\frac{b_2}{D} - \alpha B_2\Big](\beta_2 A + \gamma b_1)\Big\} +$$

$$+\frac{y^5}{120}\Big\{\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big[\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big] +$$

$$+3\Big[\frac{b_2}{D} - \alpha B_2\Big]\overline{c}_1\Big\} + \frac{y^4}{24}\Big\{\Big[\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big]\overline{c}_1 +$$

$$+2\Big[\frac{b_2}{D} - \alpha B_2\Big]\overline{c}_2\Big\} + \frac{y^3}{6}\Big\{\Big[\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big]\overline{c}_2 +$$

$$+\Big[\frac{b_2}{D} - \alpha B_2\Big]\overline{c}_3\Big\} + \frac{y^2}{2}\Big\{\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big\}\overline{c}_3 +$$

$$+y\overline{c}_6 + \overline{c}_7,$$

$$p_2' = \Big[\frac{y^2}{2}(\rho_2 g \beta_2 a_2^2 + \rho_2 g \gamma b_2) +$$

$$+y(\rho_2 g \beta_2 A + \rho_2 g \gamma b_1) + \rho_2 \nu_2 \overline{c}_1\Big]x +$$

$$+\frac{y^8}{8}\overline{k}_7 + \frac{y^7}{7}\overline{k}_6 + \frac{y^6}{6}\overline{k}_5 + \frac{y^5}{5}\overline{k}_4 + \frac{y^4}{4}\overline{k}_3 +$$

$$+\frac{y^3}{3}\overline{k}_2 + \frac{y^2}{2}\overline{k}_1 + y\overline{k}_0 + \overline{c}_8. \qquad (3)$$

Коэффициенты $k_i, \overline{k}_i$ $(i = 0, ..., 7)$, B_1, B_2 зависят от исходных параметров задачи $\rho_i, \nu_i, \chi_i, \beta_i, D, \gamma, g$ $(i = 1, 2)$. Коэффициенты $c_i, \overline{c}_i$ $(i = 1, ..., 8)$ — константы интегрирования, их значения и соотношения, связывающие параметры b_1, b_2, a_j^i $(i, j = 1, 2)$, задающие вид точного решения (2), определяются системой граничных условий. При записи решений (3) учтено свойство непрерывности температуры на границе раздела (см. раздел 2), согласно которому $a_1^1 = a_1^2 = A$, $A = const$.

2. Граничные условия. Условие $Q = \int\limits_0^h \rho_2 u_2(y)dy$ будет определять расход газа в верхнем слое. На нижней $y = -l$ и верхней $y = h$ твердых непроницаемых границах области течения должны быть выполнены условия прилипания для скорости $u_1|_{y=-l} = 0$, $u_2|_{y=h} = 0$. Концентрация пара на верхней границе $y = h$ удовлетворяет условию отсутствия потока пара на данной границе $(\partial C/\partial y)\Big|_{y=h} = 0$. Пусть граничный температурный режим определен следующим образом. Нижняя твердая граница $y = -l$ является теплоизолированной, а на верхней границе $y = h$ задан постоянный поток тепла: $(\partial T_1/\partial y)|_{y=-l} = 0$, $\kappa_2(\partial T_2/\partial y)|_{y=h} = \theta^+$.

На термокапиллярной границе раздела $y = 0$, остающейся недеформированной, должны выполняться условия непрерывности скорости и температуры $u_1|_{y=0} = u_2|_{y=0}$, $T_1|_{y=0} = T_2|_{y=0}$. Условие переноса тепла учитывает диффузионный поток пара на границе $\kappa_1(\partial T_1/\partial y) - \kappa_2(\partial T_2/\partial y) - \delta\kappa_2(\partial C/\partial y)\Big|_{y=0} = -\lambda M$. Здесь λ — скрытая теплота испарения, а M — масса жидкости, испаряющейся с единицы площади поверхности в единицу времени, κ_1 и κ_2 — коэффициенты теплопроводности. Уравнение баланса масс на границе раздела имеет вид $M = -D\rho_2\big((\partial C/\partial y) + \alpha(\partial T_2/\partial y)\big)\Big|_{y=0}$. Концентрация насыщенного пара может быть найдена с помощью соотношения $C|_{y=0} = C_*[1 + \varepsilon(T_2|_{y=0} - T_0)]$ [1,2], C_* — концентрация насыщенного пара при $T_2 = T_0$, ε — параметр, включающий молекулярную массу испаряющейся жидкости, универсальную газовую постоянную, скрытую теплоту испарения, T_0. Кинематическое условие на границе раздела выполняется автоматически (нормальная составляющая скорости жидкости равна нулю на границе $y = 0$ ввиду (2)). Проекции динамического условия [9] на вектор нормали и на касательный вектор к границе раздела $y = 0$ приводят к следующим соотношениям: $p_1 = p_2$, $\rho_1\nu_1 u_{1\,y} = \rho_2\nu_2 u_{2\,y} - \sigma_T A$.

Пусть имеет место линейная зависимость поверхностного натяжения от температуры

$$\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T_1 - \overline{T}), \qquad (4)$$

где σ_0, σ_T — постоянные ($\sigma_0 = \sigma(\overline{T})$, σ_T — температурный коэффициент поверхностного натяжения):

$$\sigma_T = \overline{\sigma} \ (\overline{\sigma} > 0), \quad T_1 \le \overline{T}, \qquad (5)$$

(нормальный термокапиллярный эффект) и

$$\sigma_T = -\overline{\sigma} \ (\overline{\sigma} > 0), \quad T_1 > \overline{T}, \qquad (6)$$

(аномальный термокапиллярный эффект, см., например, [9]).

Заметим, что $T_1|_{y=0} = Ax + c_5$, а потому условия (5), (6) сводятся к нахождению координаты $\overline{x} = (\overline{T} - c_5)/A$. Тогда, если $A > 0$, то неравенство $T_1 \leq \overline{T}$ (см. (5)) будет выполнено при $x \leq \overline{x}$. Если $A < 0$, то данное неравенство будет выполнено при $x \geq \overline{x}$. В этом случае выбор значения σ_T определен, согласно (5).

3. Алгоритм нахождения констант интегрирования. (1) В случае если для концентрации пара на верхней стенке канала принимается условие нулевого потока пара, должны выполняться равенства $b_2 = 0$, $\phi'(h) = 0$ (штрих означает производную по переменной y).
(2) Из условий непрерывности скорости и температуры на термокапиллярной границе $y = 0$ следует: $c_3 = \overline{c}_3$, $c_5 = \overline{c}_5$, $a_1^1 = a_1^2 = A$.
(3) Исходя из условия теплоизоляции твердой границы $y = -l$, имеем: $a_2^1 = 0$, $\theta_1'(-l) = 0$.
(4) Тепловой режим на верхней твердой границе $y = h$ диктует выполнение условий $a_2^2 = 0$, $\theta_2'(h) = \theta^+/\kappa_2$.
(5) Условие баланса масс приводит к соотношениям $M = -D\rho_2(\overline{c}_6 + \alpha\overline{c}_4)$, $b_2 + \alpha a_2^2 = 0$. Второе соотношение выполняется тождественно.
(6) Следствиями условия теплопереноса на границе раздела $y = 0$ являются уравнения $\kappa_1 a_2^1 - \kappa_2 a_2^2 - \delta\kappa_2 b_2 = 0$, $\kappa_1 c_4 - \kappa_2 \overline{c}_4 - \delta\kappa_2 \overline{c}_6 = -\lambda M$, первое из которых выполняется тождественно.
(7) Соотношение для концентрации насыщенного пара выполнится, если $b_1 = C_* \varepsilon A$, $\overline{c}_7 = C_* + C_* \varepsilon(\overline{c}_5 - T_0)$.
(8) Динамические условия диктуют связь между константами интегрирования c_2, $\overline{c}_2$ и c_1, $\overline{c}_1$: $c_2 = \overline{c}_2(\rho_2\nu_2)/(\rho_1\nu_1) - \sigma_T A/(\rho_1\nu_1)$, $c_1 = \overline{c}_1(\rho_2\nu_2)/(\rho_1\nu_1)$.
(9) Система линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных констант интегрирования $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$, $\overline{c}_3$ следует из условий прилипания и условия заданного расхода газа

$$\frac{l^2}{2}\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\overline{c}_1 - l\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1}\overline{c}_2 + \overline{c}_3 = \frac{l^3}{6}\frac{g\beta_1 A}{\nu_1} - l\frac{\sigma_T A}{\rho_1\nu_1},$$

$$\frac{h^2}{2}\overline{c}_1 + h\overline{c}_2 + \overline{c}_3 = -\frac{h^3}{6}\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1),$$

$$\frac{h^3}{6}\overline{c}_1 + \frac{h^2}{2}\overline{c}_2 + h\overline{c}_3 = \frac{Q}{\rho_2} - \frac{h^4}{24}\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1).$$

(10) При найденных $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$, $\overline{c}_3$ могут быть вычислены и константы c_1, c_2, c_3 (см. пункты (2), (8)).
(11) Используя условия равенства нулю коэффициентов b_2, a_2^1, a_2^2, приходим к соотношению, определяющему константу интегрирования $\overline{c}_6$ из условия $\phi'(h) = 0$ при известных $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$, $\overline{c}_3$:

$$\overline{c}_6 = -\frac{h^4}{24}\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1)\Big[\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big] - \frac{h^3}{6}\Big[\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big]\overline{c}_1 -$$

$$-\frac{h^2}{2}\Big[\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big]\overline{c}_2 - h\Big[\frac{b_1}{D} - \alpha B_1\Big]\overline{c}_3.$$

Здесь $B_1 = (DA - \chi_2\delta b_1)/(D\chi_2(1 - \alpha\delta))$.
(12) Константа интегрирования $\overline{c}_4$ должна удовлетворять соотношению $\overline{c}_4 = c_4\,\kappa_1/(\kappa_2 + \lambda D\rho_2\alpha) - \overline{c}_6\,(\delta\kappa_2 + \lambda D\rho_2)/(\kappa_2 + \lambda D\rho_2\alpha)$, которое является следствием условий переноса тепла и баланса массы на границе раздела $y = 0$. При этом константа интегрирования c_4 определяется из условия $\theta'(-l) = 0$ (см. пункты (3), (10)) при найденных c_1, c_2, c_3:

$$c_4 = -\frac{l^4}{24}\frac{g\beta_1 A^2}{\nu_1\chi_1} + \frac{l^3}{6}\frac{A}{\chi_1}c_1 - \frac{l^2}{2}\frac{A}{\chi_1}c_2 + l\frac{A}{\chi_1}c_3.$$

(13) Условие заданного потока тепла на границе $y = h$ (см. пункт (4)) приводит к соотношению, которое должно быть рассмотрено в качестве условия согласования, диктуемого видом точного решения

$$\frac{\theta^+}{\kappa_2} = \frac{h^4}{24}B_1\frac{g}{\nu_2}(\beta_2 A + \gamma b_1) + \frac{h^3}{6}B_1\overline{c}_1 +$$

$$+\frac{h^2}{2}B_1\overline{c}_2 + hB_1\overline{c}_3 + \overline{c}_4. \qquad (7)$$

(14) Массовая скорость испаряющейся с границы раздела жидкости может быть найдена с помощью следствия условия баланса масс $M = -D\rho_2\alpha\overline{c}_4 - D\rho_2\overline{c}_6$.

Таким образом, константы интегрирования c_j $(j = 1, ..., 5)$, $\overline{c}_i$ $(i = 1, ..., 7)$ должны удовлетворять соотношениям, представленным в алгоритме (1)–(14). Пусть $c_5 = 0$. Система уравнений (7) должна быть решена дважды при $\sigma_T = \overline{\sigma}$ и $\sigma_T = -\overline{\sigma}$ (см. (5), (6)). Таким образом, будет получено два варианта решений $(c_j^+, \overline{c}_i^+)$ для $\sigma_T = \overline{\sigma}$, $(c_j^-, \overline{c}_i^-)$ для $\sigma_T = -\overline{\sigma}$ $(j = 1, 2, 3, 4,\ i = 1, 2, 3, 4, 6)$. При этом уравнение (7) является условием, которому должен удовлетворять параметр θ^+, определяющий граничный температурный режим на верхней стенке канала.

Библиографический список

1. Goncharova O.N., Hennenberg M., Rezanova E.V., Kabov O.A. Modeling of the convective fuid fows with evaporation in the two-layer systems // Interfacial Phenomena and Heat Transfer (IHMT). — 2013. — Vol. 1.

2. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях с испарением на границе раздела // Прикладная механика и техническая физика. — 2014. — № 2.

3. Шлиомис М.И., Якушин В.И. Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Гидродинамика. — 1972. — № 4.

4. Бирих Р.В О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. — 1966. — № 3.

5. Саночкин Ю.В. Некоторые задачи о термокапиллярном движении жидкости // ПМТФ. — 1989. — № 5.

6. Попов В.В. Смешанная конвекция в двухслойной жидкости // Теоретические основы химической технологии. — 1981. — № XV (3).

7. Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей. — Красноярск, 2010.

8. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. — М. ; Л., 1952.

9. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. — М., 2008.

10. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. — Кн. 1. — М., 1991.