

## Течение вязкой жидкости в деформируемой коаксиальной трубе

*А.В. Проскурин<sup>1,2</sup>, А.М. Сагалаков<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

<sup>2</sup> Алтайский государственный технический университет  
им. И.И. Ползунова (Барнаул, Россия)

## Viscous Fluid Flow in a Coaxial Pipe

*A. V. Proskurin<sup>1,2</sup>, A. M. Sagalakov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Altai State University (Barnaul, Russia)

<sup>2</sup> Polzunov Altai State Technical University (Barnaul, Russia)

Рассматривается течение в коаксиальной трубе со смещением центрального цилиндра. Такие трубы используются, например, в грунтовых теплообменниках. Исследована зависимость потока от диаметра центрального цилиндра и от его положения внутри трубы при постоянном градиенте давления, а также от деформации стенки наружной трубы. Установлено, что при смещении внутреннего элемента от центра трубы расход жидкости увеличивается, а сопротивление трубы, таким образом, уменьшается. Метод R-функций позволяет построить аналитическое уравнение границы области, в которой ищется решение дифференциального уравнения. Рассматриваемая область разбивается на несколько подобластей, границы которых описываются элементарными функциями. Из этих областей при помощи логических операций (конъюнкции, дизъюнкции и других) составляется исходная область. Далее строится пучок функций, приближенно представляющих решение дифференциального уравнения и точно удовлетворяющих граничным условиям. Предложенный метод удобен для оптимизации параметров течений по сравнению с методом конечных элементов, так как не требует создания сеток для каждого рассмотренного варианта геометрии трубы, изменение геометрии канала может производиться непрерывно. Отметим, что при наличии нескольких внутренних цилиндров, а также в тех случаях, когда стенки трубы имеют сложное сечение, эти задачи также можно решать данным методом.

**Ключевые слова:** течения в трубах, метод Рвачева, бессеточные методы.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-10

**Введение.** Оптимизация течений в кольцевых трубах является важной и интересной задачей. Такие трубы используются, например, в грунтовых теплообменниках. Точное решение

In the paper, the flow in a coaxial pipe with a shifted central cylinder is investigated. Optimization of flows in circular pipes is an important and interesting problem. Such tubes are used, for example, in ground heat exchangers. The volume flux dependence from the diameter of the central cylinder and its position in the pipe at a constant pressure gradient, and from deformation of the outer wall is investigated. We found that displacement of inner conduit from the center of pipe was the cause of increased volume flux. R-functions method allows us to construct an exact region boundary equation for the region where we want to find the solution of the boundary problem. This area can be divided into several sub-areas, the boundaries of which are defined by elementary functions. We construct the equation of original region boundary from these subregions by the logical operations: R-conjunction, R-disjunction, and others. Next, the solution structure must be constructed, which approximate the solution of the differential equation and exactly satisfies the boundary conditions. The proposed method is more suitable for flow optimization by comparison with the finite element method, as it does not require the creation of grid for each case of pipe geometry, deformations of the channel is produced continuously. The presented method allows us to place more than one inner elements into a pipe and proposes complex geometry boundaries.

**Key words:** pipe flow, Rvachev functions, meshfree methods.

уравнений Навье-Стокса известно только для коаксиальной трубы, теплообменник же, находясь в грунте, может деформироваться, его элементы могут смещаться относительно друг друга.

В данной работе мы будем исследовать течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе с помощью метода функций Рвачева, с которым можно ознакомиться по работам [1, 2] и обзору [3]. В гидродинамике данный метод почти не использовался, известно малое число работ, перечисленных в [4] и ряд примеров в книге [2]. Авторами с помощью метода функций Рвачева были исследованы некоторые задачи гидродинамической устойчивости, результаты изложены в [5, 6]. В целом, получены интересные результаты, которые позволили сделать вывод о перспективности метода применительно и к другим задачам гидродинамики.

Рассмотрим коаксиальную трубу, сечение которой изображено на рисунке 1. Внешняя граница трубы обозначена  $\Omega$ , внутренняя —  $\Omega_{in}$ , обе эти линии вместе обозначим  $\Gamma$ . В работе исследуется зависимость сопротивления трубы от диаметра внутреннего цилиндра и его перемещений внутри трубы, обозначенных на рисунке 1 стрелкой, а также от деформации оболочки внешней трубы.

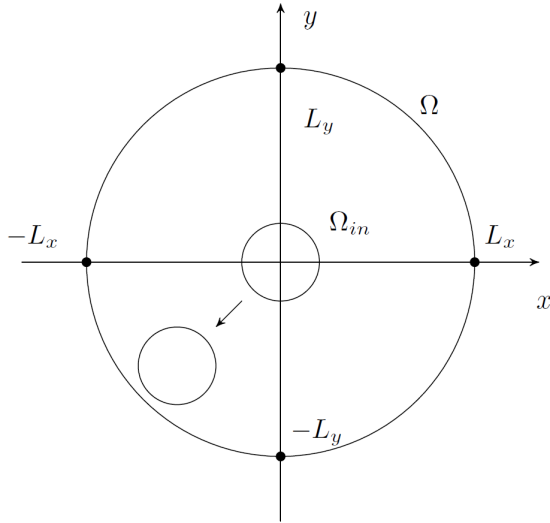


Рис. 1. Поперечное сечение трубы

**Постановка задачи.** Рассмотрим систему уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{V} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0,$$

где  $\mathbf{V}$  — вектор скорости;  $\eta$  — коэффициент вязкости;  $\rho$  — плотность жидкости.

Выберем ось  $z$  прямоугольной системы координат параллельно оси трубы. Будем считать, что градиент давления  $k$  вдоль оси  $z$  постоянный, а скорость  $V$  направлена также вдоль оси  $z$ . Тогда система уравнений (1) в стационарном случае примет вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) V = \frac{k}{\eta}. \quad (2)$$

Таким образом, параметры течения будут зависеть только от величины  $\frac{k}{\eta}$  и геометрии трубы. Так как уравнение (2) линейно, достаточно вычислить поле скоростей только для одного значения правой части. Значения скоростей для всех остальных величин  $\frac{k}{\eta}$  можно получить элементарным преобразованием уже вычисленных скоростей. Далее положим правую часть уравнения (2) равной  $-1$ . Граничные условия имеют вид

$$V = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (3)$$

**О методе R-функций.** Метод R-функций позволяет построить аналитическое уравнение границы области  $\omega(x, y)|_{\Gamma} = 0$ , в которой ищется решение дифференциального уравнения. Здесь  $\omega(x, y)$  — функция расстояния до границы, которую дальше мы будем называть граничной функцией.

В методе R-функций рассматриваемая область разбивается на несколько подобластей, границы которых описываются элементарными функциями. Из этих областей при помощи логических операций (конъюнкции, дизъюнкции и других) можно составить исходную область. При помощи R-операций, введенных в [2], аналогично можно составить уравнение границы области из уравнений границ подобластей.

В данной работе использовалась R-конъюнкция, предложенная в [7]:

$$\omega_{\Gamma} = \Omega + \Omega_{in} - \sqrt{\Omega^2 + \Omega_{in}^2 + 0.001e^{-\Omega^2 - \Omega_{in}^2}}, \quad (4)$$

где  $\Omega = 1 - \frac{y^2}{L_y^2} - \frac{x^2}{L_x^2}$  и  $\Omega_{in} = (x - x_{in})^2 + (y - y_{in})^2 - r_{in}^2$  — граничные функции для внутреннего и внешнего цилиндра;  $r_{in}$  — радиус внутреннего цилиндра;  $x_0, y_0$  — координаты его центра. График этой функции приведен на рисунке 2,  $r_{in} = 0.2, d = 0$ , линии уровня проведены для значений функции, равных 0, 0.2, 0.4. На рисунке 3 — аналогичный график при радиусе внутреннего цилиндра  $r_{in} = 0.5$  и смещении  $d = 0.7$ . В данном случае границы пересекаются и функция (4) обеспечивает скругления границ в местах пересечения с сохранением дифференцируемости  $\omega_{\Gamma}$ .

Ниже приведен код на Python для вычисления граничной функции (рис. 3):

```
from sympy import *
x,y = symbols('x,y')
f1,f2 = symbols('f1,f2')
k,a,b = symbols('k,a,b')
cS1 = f1+f2-(f1**(2*k)+f2**(2*k)
+*exp(-b*(f1**(2*k)+f2**(2*k))))**(1/(2*k))
cS1 = cS1.subs(a,0.001).subs(b,1).subs(k,1)
r_in = 0.5
x0 = 0.7
y0 = 0
```

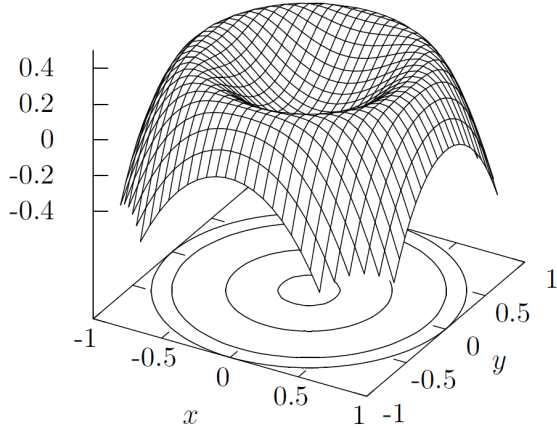


Рис. 2. График функции  $\omega_\Gamma$ ,  $r_{in} = 0.2$ ,  $d = 0$ , линии уровня 0, 0.2, 0.4

```
Lx,Ly = symbols("Lx,Ly")
Omega_in = -(r_in**2-(x-x0)**2-(y-y0)**2)
Omega = 1-(x/Lx)**2-(y/Ly)**2
Omega_Gamma = cS1.subs(f1,Omega).subs(f2,Omega_in)
plotting.plot3d(Omega_Gamma.subs(Lx,1).
subs(Ly,1),(x,-1,1),(y,-1,1))
```

Вычисления производились с символьном виде с использованием Python, что позволяет эффективно работать с областями простой геометрии, но выражения для старших производных получаются довольно громоздкие. Мы ограничились этим способом, так как его достаточно для рассматриваемой задачи и он не требует специального программного обеспечения. Процесс вычисления граничной функции может производиться и для областей намного более сложной формы, а также автоматически, как показано в работах [1, 2, 8].

**Численный метод.** Структура решения, удовлетворяющая граничным условиям (3), согласно [2] имеет вид

$$V = \omega_\Gamma \Phi_1, \quad (5)$$

где  $\Phi_1 = \sum_{ij} a_{ij} T_i(x) T_j(y)$  — неопределенная компонента пучка, в которой  $a_{ij}$  — коэффициенты;  $T_i(x)$ ,  $T_j(y)$  — полиномы Чебышева первого рода степени  $i$  и  $j$ , приведенные к соответствующему интервалу.

Зададим равномерное разбиение прямоугольной расчетной области по горизонтали  $\{x_0, x_1, \dots, x_{nx}\}$  и по вертикали  $\{y_0, y_1, \dots, y_{ny}\}$ . Упорядочим эти точки построчно  $\mathbf{x} = \{(x_0, y_0), (x_1, y_0), \dots, (x_{nx}, y_{ny})\}$ . Далее в работе будем придерживаться аналогичного порядка: величины, пронумерованные по  $x$  и  $y$  будем обозначать индексами  $i$  и  $j$ , а величины, пронумерованные построчно — индексом  $k$ .

Введем функцию

$$g_k(x, y) = \omega_\Gamma(x, y) T_i(x) T_j(y) \quad (6)$$

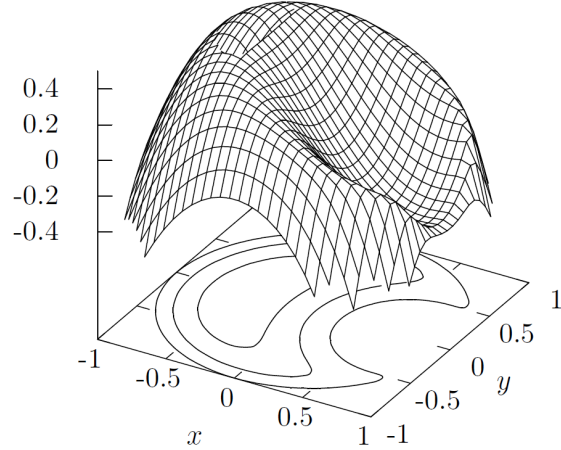


Рис. 3. График функции  $\omega_\Gamma$ ,  $r_{in} = 0.5$ ,  $d = 0.7$ , линии уровня 0, 0.2, 0.4

и скалярное произведение

$$\langle l(x, y), g_k(x, y) \rangle = \int_{-L_x}^{L_x} dx \int_{-L_y}^{L_y} dy l(x, y) g_k(x, y), \quad (7)$$

где  $l(x, y)$  — произвольная интегрируемая функция, буквой  $L$  с соответствующими индексами обозначены границы области интегрирования.

Введем вектор  $\boldsymbol{\xi} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ . Здесь  $n = p_x \cdot p_y$ , где  $p_x, p_y$  — максимальная степень полиномов Чебышева по осям  $x$  и  $y$ . Подставим (5) в (2) и, используя операцию (7), получим алгебраическую систему уравнений

$$A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}, \quad (8)$$

где  $A_{km} = \langle (\Delta g_m), g_k \rangle$ ,  $b_k = -\langle 1, g_k \rangle$ . Значения функции  $g_k(x, y)$  заданы в точках множества  $\mathbf{x}$ , для интегрирования использовался метод Симпсона. Система (8) решалась численно при помощи LAPACK.

**Результаты вычислений.** Для проверки алгоритма исследуем течение в коаксиальной трубе, для которого известно точное решение:

$$V = \frac{kr^2}{4} + \frac{k(-r_0^2 + 1) \ln(r)}{4 \ln(r_0)} - \frac{k}{4}, \quad (9)$$

где  $r$  — расстояние от оси трубы.

В таблице 1 приведены значения скорости в точке  $x = 0.0$ ,  $y = 0.6$  при разном количестве членов разложения  $p_x, p_y$ . Для сравнения приведены значения, вычисленные по формуле (9). Интегралы вычислялись при количестве точек  $nx = ny = 100$ . С увеличением  $p_x$  и  $p_y$  точность вычисления значения скорости монотонно увеличивается и достигает значения менее  $10^{-4}$ .

Таблица 1  
Значения скорости в точке  $x = 0.0, y = 0.6$   
при разном количестве членов разложения  
 $p_x, p_y, d = 0, r_{in} = 0.2$

$p_x$	$p_y$	
5	5	0.7833
10	10	0.0777
15	15	0.0767
20	20	0.0814
25	25	0.0814
30	30	0.0817
35	35	0.0824
40	40	0.0838
выр. (9)		0.0838

На рисунке 4 приведены зависимости расхода жидкости при постоянном градиенте давления от смещения внутреннего цилиндра. Рассмотрены три значения радиуса внутреннего цилиндра  $r_{in} = 0.1, 0.25, 0.5$ . Цилиндр смещался из центрального положения до тех пор, пока не выходил за пределы границы внешнего цилиндра. Значения нормированы по величине потока в трубе без внутреннего элемента. Сопротивление трубы снижается при уменьшении диаметра внутреннего цилиндра, оно максимально при его центральном положении и монотонно уменьшается при смещении.

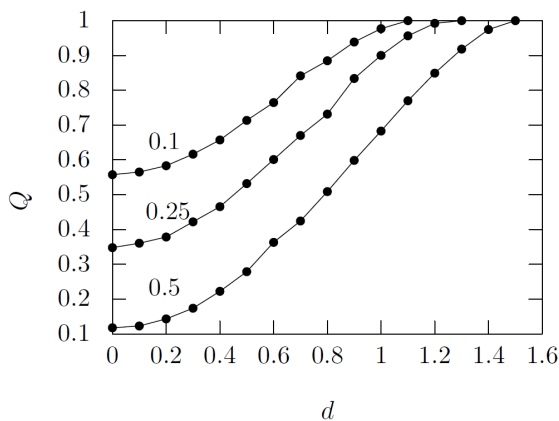


Рис. 4. График зависимости расхода жидкости  $Q$  от смещения центрального элемента  $d$ ,  $r_{in} = 0.1, 0.25, 0.5$

На рисунке 5 приведены зависимости расхода жидкости при постоянном градиенте давления от деформации оболочки по оси  $y$ . Труба может сжиматься при изгибе или под действием внешней силы. Предположим, что при таком сжатии внешняя оболочка образует эллипс, периметр которого не меняется при сжатии. Рассмотрены три значения радиуса внутреннего цилиндра  $r_{in} = 0.1, 0.25, 0.5$ , сжатие производилось до смыкания внешней оболочки и внутреннего цилиндра. Расход жидкости нормирован так же, как на предыдущем графике. Сжатие меньше всего влияет в случае внутреннего цилиндра большего радиуса  $r_{in} = 0.5$ . Коаксиальная труба с тонким центральным элементом более чувствительна к пережатию. На рисунке 6 приведен график поля скорости в круглой трубе при  $r_0 = 0.25$  и смещении  $d = 0.2$ .

дра  $r_{in} = 0.1, 0.25, 0.5$ , сжатие производилось до смыкания внешней оболочки и внутреннего цилиндра. Расход жидкости нормирован так же, как на предыдущем графике. Сжатие меньше всего влияет в случае внутреннего цилиндра большего радиуса  $r_{in} = 0.5$ . Коаксиальная труба с тонким центральным элементом более чувствительна к пережатию. На рисунке 6 приведен график поля скорости в круглой трубе при  $r_0 = 0.25$  и смещении  $d = 0.2$ .

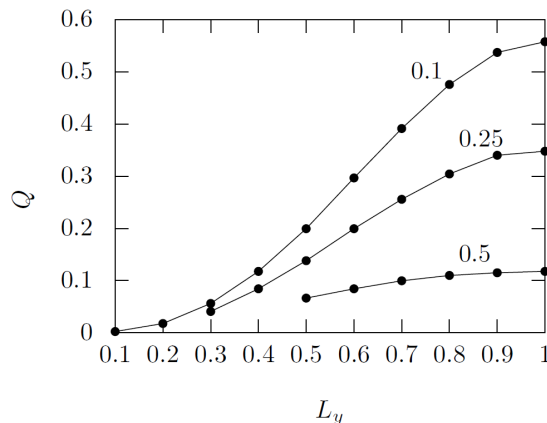


Рис. 5. График зависимости расхода жидкости  $Q$  от деформации внешней оболочки трубы  $L_y$ ,  $r_{in} = 0.1, 0.25, 0.5$

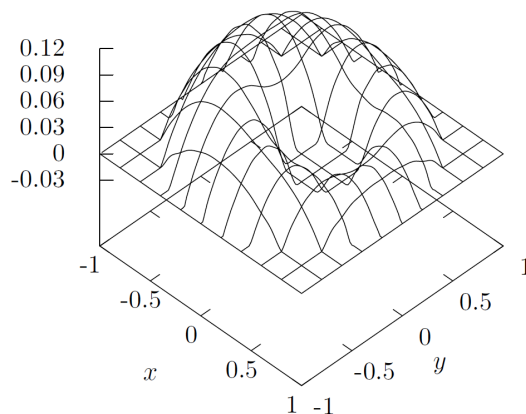


Рис. 6. График поля скоростей в трубе,  $r_0 = 0.25, d = 0.2$

**Заключение.** Мы рассмотрели течение в коаксиальной трубе со смещением центрального цилиндра. Исследована зависимость потока от диаметра центрального цилиндра и от его положения внутри трубы при постоянном градиенте давления, а также от деформации стенки наружной трубы.

Установлено, что при смещении внутреннего элемента от центра трубы расход жидкости увеличивается, а сопротивление трубы, таким образом, уменьшается. При сжатии внешней оболочки расход жидкости уменьшается. Эффект сжатия более выражен для малых диаметров внутреннего цилиндра. Предложенный метод удобен для оптимизации параметров течений по сравнению с ме-

тодом конечных элементов, так как не требует создания сеток для каждого рассмотренного варианта геометрии трубы, изменение геометрии канала может производиться непрерывно. Отметим, что при наличии нескольких внутренних цилиндров, а также в тех случаях, когда стенки трубы имеют более сложное сечение, эти задачи также можно решать данным методом.

### Библиографический список

1. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. — М., 2006.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. — Киев, 1982.
3. Shapiro V. Semi-analytic geometry with R-functions // Acta Numerica. — 2007. — Vol. 16.
4. Tsukanov I., Shapiro V., Zhang S. A Meshfree Method for Incompressible Fluid Dynamics Problems // Int. J. Numer. Meth. Engng. — 2003. — Vol. 58.
5. Proskurin A., Sagalakov A. The numerical investigation of the stability of the localized perturbation in Poiseuille flow // Computational technologies. — 2013. — Vol. 18, № 3.
6. Proskurin A., Sagalakov A. A R-function method for the stability analysis of nonparallel flows // V All-Russian Conference with Foreign Participants “Free Boundary Problems: Theory, Experiment and Applications”. — Biisk, Russia, June 29 — July 4, 2014.
7. Слесаренко А.П. S-функции в обратных задачах аналитической геометрии и моделировании тепловых процессов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2012. — Т. 1, № 4 (55).
8. Shapiro V., Tsukanov I. The Architecture of SAGE — A Meshfree System Based on RFM // Engineering with Computers. — 2002. — Vol. 18, № 4.