УДК 512.81

Построение обобщенных базисов Милнора некоторых четырехмерных метрических алгебр Ли*

П.Н. Клепиков, Д.Н. Оскорбин

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Construction of Milnor's Generalized Bases for Some Four-dimensional Metric Lie Algebras

P.N. Klepikov, D.N. Oskorbin

Altai State University (Barnaul, Russia)

Для трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой хорошо известны базисы Милнора — ортонормированные базисы, в которых структурные константы зависят от малого числа параметров. Эти базисы удобны для вычислений левоинвариантных тензорных полей.

Однако построение этих базисов привязано к размерности 3, что заставляет искать другие методы построения аналогичных базисов для метрических алгебр Ли более высокой размерности.

Рассматривается способ построения обобщенных базисов Милнора четырехмерных метрических алгебр Ли, для которых структурные константы алгебры зависят от малого числа параметров. Данный способ основан на изучении пространства орбит левоинвариантных римановых метрик групп Ли и может быть использован для построения базиса в конечномерных метрических алгебрах Ли.

В процессе построения обобщенных базисов Милнора мы используем классификацию вещественных четырехмерных метрических алгебр Ли Г.М. Мубаракзянова, а также известные факты о группах автоморфизмов этих алгебр.

Построенные базисы удобно использовать для вычисления и изучения инвариантных тензорных полей, а также сигнатур операторов кривизны на группах Ли с левоинвариантными римановыми метриками.

Ключевые слова: группы Ли, алгебры Ли, обобщенные базисы Милнора.

The Milnor bases are orthonormal bases with structure constants being dependent on a small number of parameters. These bases are convenient for calculations of left invariant tensor fields, and they are well known for three-dimensional Lie groups with a left invariant Riemannian metrics.

However, a special technique is required for construction of similar bases for metric Lie algebras of a dimension higher than 3.

In this paper, a method of Milnor generalized bases construction for four-dimensional metric Lie algebras with structural algebra constants being dependent on a small number of parameters is considered. This method is based on studying the space of orbits of Lie groups left invariant Riemannian metrics. The proposed method can be used for the basis construction in finite-dimensional metric Lie algebras.

The G.M. Mubarakzyanov's classification of real four-dimensional metric Lie algebras is adopted for the process of Milnor generalized bases construction. Also, well-known facts about the automorphism groups of these algebras are used.

The constructed bases are useful for calculating and studying of invariant tensor fields and signatures of curvature operators on Lie groups with left-invariant Riemannian metric.

Key words: Lie groups, Lie algebras, generalized Milnor's bases.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.1-13

Введение. В случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой хорошо известны теоремы Милнора [1], которые дают базис, удобный для вычислений инвариантных тензорных полей на трехмерных метрических группах Ли. Приведем формулировки этих теорем (см.: [1]).

Теорема 1. *Пусть G – трехмерная унимодулярная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — произвольное скалярное произведение в $\mathfrak{g}$, соответствующее некоторой левоинвариантной римано-*

*Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ- 2263.2014.1), Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148), а также Программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «АлтГУ» (проект № 2014.312.1.4).

вой метрике на группе Ли G. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует ортонормированный базис (базис Милнора) $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что:

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2,$$

$\lambda_i \in R$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $i = 1, 2, 3$.

Теорема 2. *Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — произвольное скалярное произведение в $\mathfrak{g}$, соответствующее некоторой левоинвариантной римановой метрике на группе Ли G. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ (базис Милнора) такой, что:*

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3, [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3, [e_2, e_3] = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

В случае трехмерных метрических групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой аналогичные базисы построены в работе [2].

Однако доказательство этих теорем жестко привязано к размерности 3. В случае произвольной размерности результаты работы [3] дают способ получения аналогов базисов Милнора.

1. Обобщенные базисы Милнора. Пусть G — n-мерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой; $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли; а $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — множество левоинвариантных метрик на G. Его можно отождествить с множеством скалярных произведений в $\mathfrak{g}$ (см. например: [3]).

Приведем лемму из [3].

Лемма 1.

$$\widetilde{\mathfrak{M}} \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n).$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество классов эквивалентности $\widetilde{\mathfrak{M}}$ по отношению изометрии метрик, $\mathfrak{BM}$ — множество классов эквивалентности $\widetilde{\mathfrak{M}}$ по отношению изометрии метрик с точностью до умножения на константу.

Основным инструментом построения обобщенных базисов Милнора будет следующая теорема, доказанная в [3].

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ — скалярное произведение в $\mathfrak{g}$, $\{e_1, ..., e_n\}$ — ортонормированный базис алгебры относительно данного скалярного произведения, $\mathfrak{U}$ — множество представителей $\mathfrak{BM}$.*

Тогда для любого скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в алгебре $\mathfrak{g}$ существуют константа $\lambda > 0$, автоморфизм $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ и представитель $g \in \mathfrak{U}$ такие, что базис

$$\{\phi g e_1, ..., \phi g e_n\}$$

ортонормирован относительно $\lambda \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle$ (обобщенный базис Милнора).

Также нам потребуется хорошо известный факт из линейной алгебры (см. например: [4]).

Лемма 2. *Для произвольной матрицы $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ существует такая ортогональная матрица $k \in \mathrm{O}(n)$, что*

$$gk = \{a_{ij}\}, \, i, j = \overline{1, n},$$

где либо a_{ij}, либо a_{ji} равен нулю, а $a_{ii} \neq 0$.

Далее мы используем классификацию четырехмерных вещественных алгебр Ли, полученную Г.М. Мубаракзяновым в работе [5], а также результаты работы [6], в которой приведены группы автоморфизмов четырехмерных вещественных алгебр Ли.

2. Пример. Рассмотрим пример построения обобщенного базиса Милнора на унимодулярной алгебре Ли $A_{3,1} \oplus A_1$. Ее ненулевые коммутаторы имеют вид:

$$[e_2; e_3] = e_1,$$

где $e_1, e_2, e_3 \in A_{3,1}$, а $\dim A_1 = 1$.

Мы будем использовать следующий известный результат, доказанный в [7].

Теорема 4. *Для алгебры Ли $A_{3,1} \oplus A_1$ $\dim \mathfrak{BM} = 0$.*

Для построения обобщенного базиса Милнора для алгебры $A_{3,1} \oplus A_1$ нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3. *Для алгебры Ли $A_{3,1} \oplus A_1$ выполняется*

$$\mathfrak{M} \cong \{[\mathrm{diag}(a, 1, 1, 1).\langle , \rangle_0] \mid a > 0\}.$$

Доказательство. По теореме 4 для алгебры $A_{3,1} \oplus A_1$ $\dim \mathfrak{BM} = 0$, а значит, коммутационные соотношения зависят от одного параметра. Пусть $[\langle , \rangle] \in \mathfrak{M}$ — класс изометрий $\langle , \rangle$, а $\langle , \rangle_0$ — скалярное произведение, в котором базис $\{e_i\}$ ортонормирован. Значит, существует $g \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ такой, что $\langle , \rangle = g.\langle , \rangle_0$. Тогда нам надо показать что

$$\exists a > 0 \colon [g.\langle , \rangle_0] = [\mathrm{diag}(a, 1, 1, 1).\langle , \rangle_0],$$

$g.\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle g^{-1} \cdot, g^{-1} \cdot \rangle$ — действие $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ на $\widetilde{\mathfrak{M}}$.

По теореме 3 это эквивалентно тому, что

$$\exists a > 0 \colon \mathrm{diag}(a, 1, 1, 1) \in \mathrm{Aut}(A_{3,1} \oplus A_1) g \mathrm{O}(4).$$

Так как $g \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, то по лемме 2 существует такое $k \in \mathrm{O}(4)$, что

$$gk = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

причем $0 \neq \det(gk) = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$.

Группа автоморфизмов алгебры $A_{3,1} \oplus A_1$ имеет вид [6]:

$$\mathrm{Aut}(A_{3,1} \oplus A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} m_{23}^{23} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \right\},$$

где $m_{23}^{23} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}$ и определитель матрицы не равен нулю.

Пусть

$$\phi := \begin{pmatrix} \alpha_4\alpha_6 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_6 & 0 \\ 0 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}(A_{3,1} \oplus A_1), \text{где}$$

$$\alpha_1 = \frac{-a_{12}a_{44} + a_{14}a_{42}}{(a_{22})^2 a_{33}a_{44}},$$
$$\alpha_2 = \frac{a_{12}a_{23}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{44} + a_{14}a_{22}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{42}}{(a_{22})^2(a_{33})^2 a_{44}},$$
$$\alpha_3 = -\frac{a_{14}}{a_{22}a_{33}a_{44}},\ \alpha_4 = \frac{1}{a_{22}},\ \alpha_5 = -\frac{a_{23}}{a_{22}a_{33}},$$
$$\alpha_6 = \frac{1}{a_{33}},\ \alpha_7 = -\frac{a_{42}}{a_{22}a_{44}},$$
$$\alpha_8 = \frac{-a_{22}a_{43} + a_{23}a + 42}{a_{22}a_{33}a_{44}},\ \alpha_9 = \frac{1}{a_{44}}.$$

Тогда

$$\phi g k = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{a_{22}a_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{где } a_{11} \neq 0.$$

Сделав замену $\dfrac{a_{11}}{a_{22}a_{33}} = a$
и домножая, в случае необходимости, справа на $\mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \in \mathrm{O}(4)$, получим

$$hgk = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{где } a > 0.$$

Теорема 5. *Для произвольного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $A_{3,1} \oplus A_1$ существует $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — ортонормированный базис $\{x_i\}$, в котором ненулевые структурные константы имеют следующий вид:*

$$C_{2,3}^1 = a, \text{где } a > 0.$$

Доказательство. По лемме 3 для алгебры Ли $A_{3,1} \oplus A_1$ имеем

$$\mathfrak{M} \cong \{[g.\langle , \rangle_0] \mid a > 0\}, \text{где } g = \mathrm{diag}(a, 1, 1, 1).$$

По теореме 3 базис, полученный из $\{e_i\}$ матрицей перехода $g^{-1} = \mathrm{diag}(1/a, 1, 1, 1)$, будет ортонормированным. Искомый базис будет иметь вид:

$$x_1 = \frac{1}{a}e_1, x_2 = e_2, x_3 = e_3, x_4 = e_4.$$

Ненулевые структурные константы в этом базисе будут иметь вид:

$$C_{2,3}^1 = a, \text{где } a > 0.$$

3. Применение обобщенных базисов Милнора. В качестве примера применения теоремы 5 получим спектры операторов Риччи, одномерной и секционной кривизн скалярных произведений на алгебре $A_{3,1} \oplus A_1$. Необходимые сведения о рассматриваемых операторах кривизны приведены, например, в [8].

Теорема 6. *Спектр оператора Риччи в базисе теоремы 5 для алгебры $A_{3,1} \oplus A_1$ имеет вид:*

$$\left\{ -\frac{a^2}{2}, -\frac{a^2}{2}, 0, \frac{a^2}{2} \right\}.$$

Спектр оператора одномерной кривизны в базисе теоремы 5 для алгебры $A_{3,1} \oplus A_1$ имеет вид:

$$\left\{ -\frac{5a^2}{24}, -\frac{5a^2}{24}, \frac{a^2}{24}, \frac{7a^2}{24} \right\}.$$

Спектр оператора секционной кривизны в базисе теоремы 5 для алгебры $A_{3,1} \oplus A_1$ имеет вид:

$$\left\{ -\frac{3a^2}{4}, 0, 0, 0, \frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{4} \right\}.$$

Доказательство. В базисе теоремы 5 характеристический многочлен матрицы оператора Риччи имеет следующий вид:

$$P(x) = -\frac{1}{8}(a^2 - 2x)(a^2 + 2x)^2 x.$$

Характеристический многочлен матрицы оператора одномерной кривизны имеет следующий вид:

$$Q(x) = (x - \frac{7a^2}{24})(x + \frac{5a^2}{24})^2(x - \frac{a^2}{24}).$$

Характеристический многочлен матрицы оператора секционной кривизны имеет вид

$$R(x) = \frac{1}{64}x^3(3a^2 + 4x)(a^2 - 4x)^2,$$

что завершает доказательство теоремы.

Таблица 1

Обобщенные базисы Милнора

Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
$4A_1$	
$A_2 \oplus 2A_1$	$C^1_{1,2} = a$, $C^4_{1,2} = b$, где $a > 0$.
$A_{3,1} \oplus A_1$	$C^1_{2,3} = a$, где $a > 0$.
$A_{3,3} \oplus A_1$	$C^1_{1,3} = C^2_{2,3} = a$, $C^1_{3,4} = b$, где $a > 0$.
$A_{3,4} \oplus A_1$	$C^1_{1,3} = -C^2_{2,3} = a$, $C^1_{2,3} = c$, $C^1_{3,4} = d$, $C^2_{3,4} = b$, где $a > 0$.
$A_{4,1}$	$C^1_{2,4} = a$, $C^1_{3,4} = b$, $C^2_{3,4} = c$, где $a > 0, c > 0$.
$A^{\beta}_{4,2}$, $\beta \neq 0$	$C^1_{1,4} = a\beta$, $C^1_{2,4} = (1-\beta)ad$, $C^2_{2,4} = C^3_{3,4} = a$, $C^1_{3,4} = ((1-\beta)e + d)ac$, $C^2_{3,4} = ac$, где $a > 0, c > 0$.
$A^{1,1}_{4,5}$	$C^1_{1,4} = C^1_{2,4} = C^1_{3,4} = a$, где $a > 0$.
$A_{4,8}$	$C^1_{2,3} = a$, $C^1_{2,4} = b$, $C^2_{2,4} = -C^3_{3,4} = c$, $C^1_{3,4} = d$, $C^2_{3,4} = e$, где $a > 0, c > 0$.

Как следствие теоремы 6 получаем теорему, доказанную А.Г. Кремлевым и Ю.Г. Никоноровым в [9].

Теорема 7. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $A_{3,1} \oplus A_1$ реализуется только сигнатура* $(-,-,0,+)$.

4. Обобщенные базисы Милнора некоторых четырехмерных метрических алгебр Ли. В приведенной выше таблице 1 содержатся структурные константы обобщенных базисов Милнора для некоторых четырехмерных метрических алгебр Ли, построенных авторами.

Библиографический список

1. Milnor J. Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups. // Adv. Math. — 1976. — Vol. 21(3).

2. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Левоинвариантные лоренцевы метрики на трехмерных группах Ли с нулевым квадратом тензора Схоутена — Вейля // ДАН. — 2005. — Т. 4.

3. Kodama H., Takahara A., Tamaru H. The Space of Left-Invariant Metrics on a Lie Group up to Isometry and Scaling // Manuscripta math. — 2011. — V. 135.

4. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. — М., 1980.

5. Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли. // Изв. вузов. Матем. — 1963. — №1.

6. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W. Realizations of Real Low-Dimensional Lie Algebras // J.Phys. A: Math. Gen. — 2003. — Vol. 36.

7. Lauret J. Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups // Differ. Geom. Appl. — 2003. — № 18 (2).

8. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий // ДАН — 2013. — Т. 450, № 2.

9. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. — 2008. — Т. 11, № 2.