

**Построение математической модели течений  
в тонком слое жидкости на основе классических  
уравнений конвекции и обобщенных условий  
на границе раздела\***

*О.Н. Гончарова<sup>1, 2</sup>, Е.В. Резанова<sup>1, 2</sup>*

<sup>1</sup> Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

<sup>2</sup> Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского  
отделения Российской академии наук (Новосибирск, Россия)

**Construction of a Mathematical Model of Flows  
in a Thin Liquid Layer on the Basis of the Classical  
Convection Equations and Generalized Conditions  
on an Interface**

*O.N. Goncharova<sup>1, 2</sup>, E.V. Rezanova<sup>1, 2</sup>*

<sup>1</sup> Altai State University (Barnaul, Russia)

<sup>2</sup> Kutateladze Institute of Thermophysics, Siberian Branch  
of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russia)

Изучены течения в тонком слое жидкости, стекающей по наклонной неравномерно нагреваемой подложке. Математическое моделирование подобных течений проводится на основе длинноволнового приближения уравнений. Основой математической модели являются классические уравнения конвекции и уравнения на термокапиллярной границе, представляющие собой обобщение на случай испарения жидкости с границы раздела кинематического, динамического и энергетического условий. Проводится параметрический анализ данных условий. Приведены значения характерных величин и безразмерных параметров задачи для различных пар «жидкость — газ» типа «этанол — азот», «HFE7100 — азот», «FC72 — азот». Односторонняя математическая модель течений тонкого слоя жидкости по наклонной подложке представлена в работе в двумерном случае для умеренных чисел Рейнольдса. Выведено эволюционное уравнение для толщины слоя, которое учитывает эффекты гравитации, капиллярности и термокапиллярности, вязкости и испарения, а также действия дополнительных касательных напряжений со стороны внешней среды.

**Ключевые слова:** течение жидкости, граница раздела, испарение, уравнения тонкого слоя, математическая модель.

**DOI 10.14258/izvasu(2015)1.1-12**

In this paper, fluid flows in a thin layer, flowing down an inclined nonuniformly heated substrate, are studied. Mathematical modeling of the fluid flows is carried out on the basis of the long-wave approximation of the equations. In the present case, the basis of the mathematical model is the classical convection equations and equations on a thermocapillary interface. The last equations are a generalization in the case of evaporation at the interface of kinematic, dynamic, and energetic conditions. The parametric analysis of these conditions is performed. Values of characteristic scales and dimensionless parameters of different pairs of “liquid — gas” systems like “ethanol — nitrogen”, “HFE7100 — nitrogen”, “FC72 — nitrogen” are presented. The one-sided mathematical model of flows in a thin liquid layer flowing down an inclined wall is presented in the paper in the two-dimensional case for moderate Reynolds numbers. An evolution equation for the layer thickness is derived. It takes into account effects of gravitation, capillarity and thermocapillarity, viscosity and evaporation, and also an action of additional tangential stresses of an external gas phase.

**Key words:** fluid flow, interface, evaporation, equations of a thin liquid layer, mathematical model.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-00163) и Минобрнауки России (идентификатор проекта RFMEFI61314X0011).

**Введение.** Изучаются течения вязкой несжимаемой жидкости в условиях, когда на границе раздела требуется учесть перенос массы в результате испарения. В настоящее время имеется ряд работ, где течение жидкости с учетом испарения изучается в приближении тонкого слоя [1–7]. При построении математических моделей для описания течения тонкого слоя или пленки жидкости в длинноволновом приближении исходят из того, что могут быть выбраны два масштаба длины и скорости. В качестве поперечной характерной длины  $d$  выбирают максимальную толщину слоя в начальный момент времени ( $\max h_0$ ), а в качестве продольной  $l$  — наименьший из периодов функции  $h_0$  [8]. Характерные масштабы длины выбирают также исходя из заданного расхода жидкости [9]  $d = (3\Gamma\mu_0/(\rho \sin \alpha)^{1/3})$ , где  $l = (\sigma_0 d^2/(\rho U^2))^{1/3}$ ;  $U = \mu_0/\rho d$  — характерная продольная скорость;  $\Gamma$  — заданный расход жидкости;  $\mu_0, \sigma_0$  — значения коэффициентов динамической вязкости и поверхностного натяжения при некотором относительном значении температуры;  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\alpha$  — угол наклона подложки, по которой стекает пленка, к горизонту.

В данной работе предложена новая математическая модель для описания течений тонкого слоя жидкости в условиях испарения на границе раздела. Математическое моделирование проводится на основе длинноволнового приближения уравнений Обербека — Буссинеска и обобщенных кинематического, динамического и энергетического условий на свободной границе [10–12]. На твердой непроницаемой подложке выполняются условия прилипания для скорости, и задано распределение температуры, зависящее от времени и продольной координаты так, чтобы обеспечить неоднородный нагрев. Кинетическое уравнение Герца — Кнудсена (см.: [1; 5; 6]) используется для задания зависимости локального потока массы испаряющейся жидкости от температуры на границе раздела.

Поскольку решение системы уравнений и граничных условий, описывающих течение тонкого слоя, строится в виде рядов (разложений) по степеням малого параметра  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = d/l$ ), то задача сводится к поиску главных и первых членов разложений и решению эволюционного уравнения для толщины слоя  $h$ . Течение жидкости описывается в терминах толщины слоя.

Представлены результаты параметрического анализа задачи о термокапиллярных течениях в тонких слоях с учетом испарения. Приведены значения характерных величин и безразмерных параметров задачи для различных пар «жидкость — газ» типа «этанол — азот», «HFE7100 — азот», «FC72 — азот». Построенная односторон-

няя математическая модель позволяет изучать течение тонких слоев жидкости с учетом испарения на термокапиллярной границе. Дополнительные касательные напряжения, создаваемые спутным потоком газа, учитываются в граничных условиях. Представленное эволюционное уравнение, определяющее толщину слоя жидкости, учитывает также эффекты гравитации, вязкости, капиллярности и термокапиллярности, а также испарения на границе.

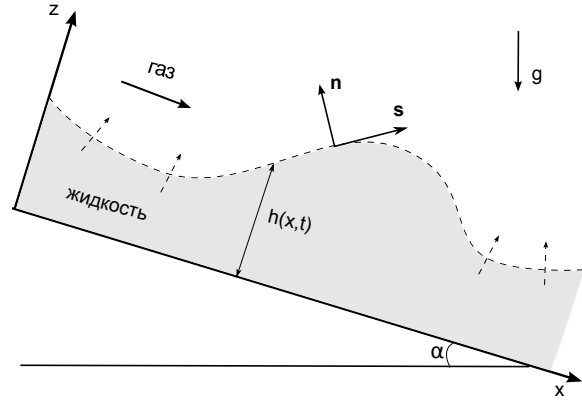


Рис. 1. Геометрия области течения

**1. Основные уравнения.** Пусть  $l$  — продольная характерная длина,  $d$  — поперечная характерная длина, причем  $l \gg d$ , так что  $\varepsilon = d/l$  представляет собой малый параметр системы. Отметим, что характерные продольная и поперечная скорости  $u_*$  и  $w_*$  также связаны между собой:  $w_* = \varepsilon u_*$ . Пусть характерное время процесса  $t_*$  связано с другими параметрами задачи следующим образом:  $l = u_* t_*$ , а характерное давление задается выражением  $p_* = \rho_* \nu l / d^2$ ,  $T_*$  — характерный перепад температуры.

Систему уравнений Обербека — Буссинеска в безразмерном виде представим следующим образом:

$$Re\varepsilon^2(u_t + uu_x + ww_z) = -p'_x + \varepsilon^2 u_{xx} + u_{zz} - \gamma_1 T \sin \alpha; \quad (1)$$

$$Re\varepsilon^4(w_t + ww_x + ww_z) = -p'_z + \varepsilon^4 w_{xx} + \varepsilon^2 w_{zz} + \gamma_2 T \cos \alpha; \quad (2)$$

$$u_x + w_z = 0; \quad (3)$$

$$RePr\varepsilon^2(T_t + uT_x + wT_z) = \varepsilon^2 T_{xx} + T_{zz}. \quad (4)$$

Здесь  $v = (u, w)$  — вектор скорости жидкости;  $p'$  — модифицированное давление ( $p' = p - \gamma_1(\beta T_*)^{-1}x \sin \alpha + \gamma_2(\beta T_*)^{-1}z \cos \alpha$ );  $T$  — температура;  $\rho$  — плотность жидкости (некоторое относительное значение плотности);  $Re = u_* l / \nu$  — число Рейнольдса;  $Pr = \nu / \chi$  — число Прандтля;  $\gamma_1 = Gr / (Re\varepsilon)$ ,  $\gamma_2 = Gr / Re$ ,  $Gr = d^3 g \beta T_* / \nu^2$  —

число Грасгофа;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости жидкости;  $\chi$  — коэффициент температуропроводности;  $\beta$  — коэффициент теплового расширения жидкости. Система координат выбрана так, чтобы ось  $Ox$  была направлена вдоль твердой границы  $z = 0$ ,  $g = |g|$ , вектор силы тяжести имеет вид:  $g = (g_1, g_2) = (g \sin \alpha, -g \cos \alpha)$  (см. рис. 1).

Уравнение границы имеет вид:  $z = h(x, t)$ . Вектор нормали к границе  $n$  и касательный вектор  $s$  имеют координаты  $(n_1, n_2)$  и  $(n_2, -n_1)$  соответственно,  $n_1 = -\varepsilon h_x / \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}$ ,  $n_2 = 1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}$ . Кривизна свободной границы и скорость ее перемещения по направлению внешней нормали задаются соотношениями  $\frac{2H}{\varepsilon} = \varepsilon h_{xx} / \sqrt{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^3}$ ,  $D_n = -\varepsilon h_t / \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}$ .

На термокапиллярной границе раздела  $z = h(x, t)$  должны быть выполнены кинематическое, динамическое и энергетическое условия [10–12]. Представим кинематическое условие в виде:

$$-\varepsilon(h_t + h_x u - w) / \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2} = E J_{ev}. \quad (5)$$

Динамические условия в безразмерной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} -p + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} [\varepsilon^2 h_x^2 u_x + w_z - \\ -h_x(u_z + \varepsilon^2 w_x)] = -p^g + \frac{2\varepsilon^2 \bar{\rho} \bar{\nu} \bar{h}^{-1}}{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)} [\varepsilon^2 h_x^2 u_x^g + \\ + w_z^g - \varepsilon h_x(u_z^g + w_x^g)] + \\ + (1 - (1/\bar{\rho})) \frac{E^2}{Re} J_{ev}^2 + 2\sigma H \frac{\varepsilon^2}{Ca}; \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} \left[ -\varepsilon^2 h_x u_x + \varepsilon^2 h_x w_z + \right. \\ \left. + \frac{1 - \varepsilon^2 h_x}{2} (u_z + \varepsilon^2 w_x) \right] - \\ - \frac{2\bar{\rho} \bar{\nu} \bar{h}^{-1} \varepsilon}{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)} \left[ -\varepsilon h_x u_x^g + \varepsilon h_x w_z^g + \right. \\ \left. + \frac{1 - \varepsilon^2 h_x^2}{2} (u_z^g + w_x^g) \right] = \\ = -\frac{Ma \varepsilon}{Re Pr \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}} (T_x + h_x T_z), \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} + \beta_2 \{T \operatorname{div}_{\Gamma} v\} = \beta_3 J_{ev} + \\ + \beta_4 J_{ev} \left( -p + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} [\varepsilon^2 h_x^2 u_x + w_z - \right. \\ \left. - h_x(u_z + \varepsilon^2 w_x)] \right) + \frac{1}{2} \beta_5 J_{ev}^3 + \\ + \beta_6 \sigma \frac{\varepsilon h_{xx}}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^3}} J_{ev}. \quad (8) \end{aligned}$$

Предполагая линейную зависимость коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  от температуры, получим  $\sigma = 1 - \alpha_\sigma T$ ,  $\alpha_\sigma = \frac{Ma Ca}{Re Pr}$ ,  $Ma = \frac{\sigma_T T_* l}{\rho \nu \chi}$  — число Марангони,  $Ca = \frac{u_* \rho \nu}{\sigma_0}$  — капиллярное число,  $\sigma_0$  — значение коэффициента  $\sigma$  при некотором значении температуры,  $\sigma_T$  — температурный коэффициент поверхностного натяжения).  $\partial T / \partial n$  и  $\operatorname{div}_{\Gamma} v$  вычисляются по формулам

$$\frac{\partial T}{\partial n} = (-\varepsilon^2 h_x T_x + T_z) / \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\Gamma} v = \sum_{i=1}^2 \partial v_i / \partial x_i - \sum_{i=1}^2 n_i (n \cdot \nabla v_i) = (u_x + w_z)|_{\Gamma} - \\ - (\varepsilon^2 h_x^2 u_x - h_x(u_z + \varepsilon^2 w_x) + w_z) / (1 + \varepsilon^2 h_x^2). \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:  $\bar{\nu}$ ,  $\bar{\rho}$  — отношение коэффициентов кинематической вязкости и плотностей газа и жидкости соответственно;  $\bar{v} = u_*^g / u_*$  — отношение характерной продольной скорости газа к характерной скорости жидкости  $u_*$ ;  $p^g$  — давление в газе (безразмерное);  $\bar{h}$  — отношение характерного размера слоя газа к  $l$ ;  $\beta_2 = \frac{Ma \varepsilon}{Re Pr E \bar{U}}$ ;  $\beta_3 = 1$ ;  $\beta_4 = ((1/\bar{\rho}) - 1) \frac{1}{Re \bar{U} \varepsilon^2}$ ;  $\beta_5 = (1 - 1/\bar{\rho})^2 \frac{E^2}{Re^2 \bar{U} \varepsilon^2}$ ;  $\beta_6 = (1 - (1/\bar{\rho})) \frac{1}{Re Ca \bar{U}}$ . При этом  $\bar{U} = \frac{\lambda_U}{u_*^g}$ ,  $E = \frac{\kappa T_*}{\lambda_U \rho \nu}$ , где  $E$  — коэффициент испарения (см.: [1; 5; 6]);  $\lambda_U$  — скрытая теплота парообразования;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности жидкости. Характерная величина  $J_*^{ev}$  потока массы пара вычисляется как  $\frac{\kappa T_*}{d \lambda_U}$ .

Величину локального потока массы пара на границе раздела  $J_{ev}$  будем определять с помощью уравнения Герца — Кнудсена (см.: [2; 5; 6]), записанного в безразмерной форме:

$$J_{ev} = \alpha_J T|_{z=h(x,t)}. \quad (9)$$

Здесь коэффициент  $\alpha_J$  вычисляется следующим образом:  $\alpha_J = \alpha \rho_s \lambda_U T_* J_*^{-1} (M / (2\pi R_g T_s^3))^{1/2}$  [2; 12], где  $\alpha$  — коэффициент accommodations;  $\rho_s$  — плотность пара;  $M$  — молекулярный вес;  $R_g$  — универсальная газовая постоянная;  $T_s$  — температура насыщенного пара.

На твердой подложке  $z = 0$  потребуем выполнения условия прилипания для скорости

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = 0. \quad (10)$$

Пусть также задано распределение температуры

$$T|_{z=0} = \Theta_0(x, t). \quad (11)$$

Для дальнейшего рассмотрения положим  $Re = 1$  (математическая модель течения тонкого слоя жидкости будет предложена, если числа Рейнольдса достаточно умеренные и  $Re = O(1)$ ).

**2. Параметрический анализ задачи.**

Если члены более высокого порядка, чем  $\varepsilon^2$ , будут опущены, то результатом упрощений уравнений (5)–(8) станут следующие соотношения на границе раздела:

$$(h_t + h_x u - w) + (E/\varepsilon)J_{ev} = 0; \quad (12)$$

$$-p + 2\varepsilon^2(w_z - h_x u_z) = -p^g + \alpha_E J_{ev}^2 + \alpha_{Ca} h_{xx}(1 - \alpha_\sigma T); \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 h_x (w_z - u_x) + 0.5(u_z + \varepsilon^2 w_x) = \\ = \alpha_\tau [\varepsilon h_x (w_z^g - u_x^g) + 0.5(u_z^g + w_x^g)] - \\ - 0.5\alpha_{Ma}(T_x + h_x T_z); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} -T_z + \varepsilon^2 h_x T_x + \beta_2 \{T \operatorname{div} \Gamma v\} = \\ = \beta_3 J_{ev} + \beta_4 J_{ev} [-p + 2\varepsilon^2(w_z - h_x u_z)] + \\ + 0.5\beta_5 J_{ev}^3 + \beta_6 \varepsilon h_{xx}(1 - \alpha_\sigma T) J_{ev}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь введены дополнительные обозначения:  $\alpha_E = (1 - (1/\bar{\rho}))E^2$ ;  $\alpha_{Ca} = \frac{\varepsilon^3}{Ca}$ ;  $\alpha_\tau = \frac{\bar{\rho} \bar{\nu} \bar{\nu} \varepsilon}{h}$ ;  $\alpha_{Ma} = \frac{Ma \varepsilon}{Pr}$ . Для проведения параметрического анализа представим значения физических параметров задачи для тех систем «жидкость – газ», которые используются в эксперименте [13]. Это этанол и азот, HFE7100 и азот, FC72 и азот. Физические характеристики жидкостей и газа приведены в таблице 3. Значения безразмерных параметров в соотношениях (12)–(15) представлены в таблицах 1, 2 в случае, если характерный перепад температуры равен  $T_* = 10 \text{ K}$  (см.: [11–13]). В таблицах показаны порядки некоторых коэффициентов, чтобы стали понятны последующие возможные упрощения.

Таблица 1

Значения параметров  $\alpha$

" $\alpha$ "	Этанол – азот	HFE7100 – азот	FC72 – азот
$\alpha_\sigma$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$
$\alpha_{Ca}$	$\varepsilon^3 10^6$	$\varepsilon^3 10^6$	$\varepsilon^3 10^5$
$\alpha_E$	$-10^{-3}$	$-10^{-2}$	$-10^{-2}$
$\alpha_\tau$	$\varepsilon 10^{-2}$	$\varepsilon 10^{-2}$	$\varepsilon 10^{-2}$
$\alpha_{Ma}$	$\varepsilon 10^3$	$\varepsilon 10^4$	$\varepsilon 10^3$

Таблица 2

Значения параметров  $\beta$

" $\alpha$ "	Этанол – азот	HFE7100 – азот	FC72 – азот
$\beta_2$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$
$\beta_3$	1	1	1
$\beta_4$	$10^{-3} \varepsilon^{-2}$	$10^{-3} \varepsilon^{-2}$	$10^{-3} \varepsilon^{-2}$
$\beta_5$	$10^{-6} \varepsilon^{-2}$	$10^{-5} \varepsilon^{-2}$	$10^{-5} \varepsilon^{-2}$
$\beta_6$	$-10^2$	$-10^2$	$-10^2$

Таблица 3

Физические параметры задачи

Параметр	Этанол	HFE7100	FC72
$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	0.79	1.5	1.68
$\nu$ , см <sup>2</sup> /сек	0.015	0.0038	0.0038
$\sigma_0$ , дин/см	22	12.4	11.91
$\sigma_T$ , дин/(см К)	0.08	0.114	0.09
$\lambda_U$ , кал/г	217	26.5	21
$\kappa$ , кал/(сек см К)	$4 \cdot 10^{-4}$	$1.67 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$
$\chi$ , см <sup>2</sup> /сек	$0.89 \cdot 10^{-3}$	$0.4 \cdot 10^{-3}$	$0.32 \cdot 10^{-3}$
$c_p$ , кал/(г К)	0.71	0.312	0.26

**3. Уравнения тонкого слоя.**

Задача нахождения компонент скорости  $u$ ,  $w$ , температуры  $T$ , давления  $p'$  будет решена, как только будет найдена толщина слоя жидкости  $h$ . Если ограничиться постановкой задач для главных членов разложений искомых функций по степеням малого параметра  $\varepsilon$  исходя из уравнений, которые следуют из (1)–(4) и (12)–(15), то уравнение для толщины слоя  $h$  можно записать в виде:

$$\begin{aligned} h_t + h_x [(1/24)\gamma_2 \cos \alpha A_x h^4 + (1/6)(\gamma_2 \cos \alpha (\Theta_0)_x + \\ + \gamma_1 \sin \alpha A) h^3 + (1/2)((C_0)_x + \gamma_1 \sin \alpha \Theta_0) h^2 + C_1 h] + \\ + [(1/120)\gamma_2 \cos \alpha A_{xx} h^5 + (1/24)(\gamma_2 \cos \alpha (\Theta_0)_{xx} + \\ + \gamma_1 \sin \alpha A_x) h^4 + (1/6)((C_0)_{xx} + \gamma_1 \sin \alpha (\Theta_0)_x) h^3 + \\ + (1/2)(C_1)_x h^2] + E \varepsilon^{-1} \alpha_J (Ah + \Theta_0) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$J_{ev} = \alpha_J [A(x, t)h + \Theta_0(x, t)].$$

Функции  $A$  и  $\Theta_0$  определяют тепловой режим течения. Функция  $\Theta_0$  задана (см.: (11)). Для функции  $A$  имеет место следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} -A + \beta_2 (Ah + \Theta_0) \left( (1/24)\gamma_2 \cos \alpha A_{xx} h^4 + \right. \\ \left. + (1/6)\gamma_2 \cos \alpha (\Theta_0)_{xx} h^3 + \right. \\ \left. + (1/2)(C_0)_{xx} h^2 + (1/6)\gamma_1 \sin \alpha A_x h^3 + \right. \\ \left. + (1/2)\gamma_1 \sin \alpha (\Theta_0)_x h^2 + (C_1)_x h \right) - \\ - \beta_2 (Ah + \Theta_0) h_x \left( (1/6)\gamma_2 \cos \alpha h^3 + \right. \\ \left. + (1/2)h^2 [(\Theta_0)_x \gamma_2 \cos \alpha + A \gamma_1 \sin \alpha] + \right. \\ \left. + h[(C_0)_x + \Theta_0 \gamma_1 \sin \alpha] + C_1 \right) = \\ = \alpha_J (\beta_3 + \bar{\beta}_6 h_{xx}) (Ah + \Theta_0). \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{\beta}_6 = \beta_6 \varepsilon$ . Функции  $C_0$ ,  $C_1$  выражаются через функции  $h$  и  $A$ :

$$\begin{aligned} C_0(x, t) = p^g - \alpha_{Ca} h_{xx} (1 - \alpha_\sigma (Ah + \Theta_0)) - \\ - \gamma_2 \cos \alpha (1/2) Ah^2 - \gamma_2 \cos \alpha \Theta_0 h - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_1(\beta T_*)^{-1}x \sin \alpha + \gamma_2 h \cos \alpha; \\
& C_1(x, t) = -\alpha_{Ma}(Ah + \Theta_0)_x - \\
& -h \left( -\alpha_{Ca} h_{xx} (1 - \alpha_\sigma (Ah + \Theta_0)) + \right. \\
& + \alpha_{Ca} \alpha_\sigma h_{xx} (Ah + \Theta_0)_x - (1/2) \gamma_2 \cos \alpha (Ah^2)_x - \\
& \left. - \gamma_2 \cos \alpha (\Theta_0 h)_x - \gamma_1 (\beta T_*)^{-1} \sin \alpha + \gamma_2 \cos \alpha h_x \right) - \\
& -\gamma_1 \sin \alpha \left( (1/2) Ah^2 + \Theta_0 h \right) - \\
& -\gamma_2 \cos \alpha \left( (1/6) A_x h^3 + (1/2) (\Theta_0)_x h^2 \right).
\end{aligned}$$

При этом влияние касательных напряжений  $\tau(x, t)$  со стороны внешней среды не учитывается ( $\tau(x, t) = 0, 5(u_z^g + w_x^g)$ ). Коэффициент испарения  $E$  и коэффициент  $\alpha_J$  (9) есть величины порядка  $10^{-3}$ ,  $10$  — для этанола и  $10^{-2}$ ,  $1$  — для HFE7100 и FC72 соответственно. Главные члены разложений искомых функций (компонент вектора скорости, давления, температуры)  $u^0, w^0, p^0$ ,

$T^0$  представляют собой полиномы относительно поперечной координаты  $z$ . При этом  $u^0$  является полиномом четвертой степени,  $w^0$  — полиномом пятой степени, а  $T^0$  — полиномом первой степени. Их коэффициенты есть фактически функции, зависящие от  $x$  и  $t$ . Если функция  $h$  известна, то скорость, давление и температура также определяются с учетом соответствующих формул.

Заметим, что для замыкания постановки задачи следует задать начальное положение термокапиллярной границы раздела  $h(x, 0) = h_0(x)$ , начальные условия для компонент вектора скорости и температуры, условия на бесконечности.

Эволюционное уравнение (16) для толщины  $h$  слоя жидкости, стекающей по неравномерно нагретой подложке, выведено с целью исследовать конвективные течения тонких слоев в поле силы тяжести с учетом действия термокапиллярных сил, эффектов капиллярности и испарения на границе раздела.

### Библиографический список

1. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-Scale Evolution of Thin Liquid Films // *Reviews of Modern Physics*. — 1997. — Vol. 69 (3).
2. Miladinova S., Slavtchev S., Lebon G., Legros J.-C. Long-Wave Instabilities of Non-Uniformly Heated Falling Films // *J. Fluid Mech.* — 2002. — Vol. 453.
3. Shklyaev O., Fried E. Stability of an Evaporating Thin Liquid Film // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2007. — Vol. 584.
4. Кабов О.А., Кабова Ю.О., Кузнецов В.В. Испарение неизотермической пленки жидкости в микроканале при спутном потоке газа // *ДАН*. — 2012. — Т. 446, №5.
5. Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Тарасов Я.А. Математическое моделирование термокапиллярных течений в тонком слое жидкости с учетом испарения // *Известия Алтайского гос. ун-та*. — 2014. — №1/1 (81).
6. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Математическое моделирование термокапиллярных течений в тонком слое жидкости с учетом испарения // *Известия Алтайского гос. ун-та*. — 2014. — №1/2 (81).
7. Тарасов Я.А. Математическая модель конвективных течений жидкости с учетом испарения в приближении тонкого слоя : магистерская диссертация. — Барнаул, 2014.
8. Копбосынов Б.К., Пухначев В.В. Термокапиллярное движение в тонком слое жидкости // *Гидромеханика и процессы переноса в невесомости : сб. научн. трудов*. — Свердловск, 1983.
9. Кабова Ю.О., Кузнецов В.В. Стеkanie неизотермического тонкого слоя жидкости с непостоянной вязкостью // *ПМТФ*. — 2002. — №6 (43).
10. Iorio C.S., Goncharova O.N., Kabov O.A. Study of Evaporative Convection in an Open Cavity under Shear Stress Flow // *Microgravity Sci. Technol.* — 2009. — Vol. 21(1).
11. Iorio C.S., Goncharova O.N., Kabov O.A. Heat and mass transfer control by evaporative thermal patterning of thin liquid layers // *Computational Thermal Sci.* — 2011. — №3 (4).
12. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // *Известия Алтайского гос. ун-та*. — 2012. — №1/2 (73).
13. Lyulin Yu., Kabov O. Evaporative convection in a horizontal liquid layer under shear-stress gas flow // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. — 2014. — No. 70.