УДК 536

Осевое конвективное течение дисперсной смеси в горизонтальной трубе с продольным градиентом температуры

Д.И. Попов, Р.М. Утемесов, А.Ю. Юдинцев

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Axial Convective Dispersed Flow in a Horisontal Pipe With Longitudinal Temperature Gradient

D.I. Popov, R.M. Utemesov, A.Yu. Yudintsev

Altai State University (Barnaul, Russia)

Получено точное решение, описывающее установившееся дисперсное течение в горизонтальной трубе под действием продольного градиента температуры и поперечной силы тяжести. Интерес к изучению движения двухфазных систем обусловлен широким применением подобных сред в инженерно-технических и научно-практических сферах. Уравнения тепловой гравитационной конвекции рассматривались в приближении Обербека — Буссинеска. В качестве модели дисперсной смеси была принята модель неоднородной среды, состоящей из вязкого газа и облака твердых сферических частиц. Обмен количеством движения на межфазной границе определяется законом Стокса. Объемная концентрация примеси достаточно мала, а эффективная вязкость смеси определяется по формуле Эйнштейна. Исследование процессов тепломассообмена в дисперсных средах представляет собой важную прикладную задачу. Например, расчет режимов течения теплоносителя для рекуперативных теплообменных установок, использование неоднородных сред в химической промышленности и т.д.

Ключевые слова: конвекция, двухфазные среды, инвариантные решения.

In this paper, the exact solution of stationary dispersed flow in a horizontal pipe under longitudinal temperature gradient and transversal gravity force is obtained. The study of non homogeneous system dynamics is concerned with wide application of dispersed flows in technical, engineering and scientific areas. The Oberbek-Boussinesq approximation is used to describe dispersed convective flow. The model of non homogeneous medium (dusty gas), consisting of viscous gas and continuum of solid spherical particles, is used to describe the dispersed flow. The quantity of motion on the phase interface is determined in accordance with the Stokes' law. The bulk concentration of dust in a mixture is sufficiently low and the effective viscousity of the mixture is defined by the Einstein formula. The research of heat-mass interchange in dispersed flows is concerned with many practical and technical problems. For example, the numerical study of flow of heat-transfer material in recuperative heat exchange systems, non homogeneous flows in chemical industry etc.

Key words: convection, two-phase flow, invariant solution.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.1-09

Рассматривается конвективное течение неоднородной среды, состоящей из несущей жидкости (газа) с небольшой примесью твердых частиц [1; 2]. Интерес к такого рода неоднородным системам обусловлен их весьма широким распространением [3]. Мелкие частицы (алюминиевая пудра, частицы табачного дыма и др.) часто применяются для визуализации течения [4]; возникает, естественно, вопрос о влиянии этих добавок на характеристики течений. Например, достаточные условия устойчивости изотермических дисперсных течений меняются кардинальным образом [5].

1. Уравнения движения. Будем рассматривать тепловую гравитационную конвекцию в приближении Обербека — Буссинеска [6]. В основу будет положена модель, согласно которой имеются две взаимопроникающие и обменивающиеся количеством движения и теплом сплошные среды – несущая жидкость и облако частиц. Динамика такой системы описывается уравнениями двухскоростной модели монодисперсной смеси [1]. Дисперсионная фаза является несжимаемой вязкой жидкостью, а дисперсная — представлена облаком твердых частиц, нормальные и касательные напряжения в котором равны нулю. Положим, что на границе раздела фаз действует сила трения Стокса, а теплообмен определяется законом Фурье. Интенсивность этих процессов будет характеризоваться величинами $\tau_v^{'} = m/(3\pi d\,\mu)$, $\tau_T^{'} = c_p/(2\pi d\,k)$ — времена скоростной и тепловой релаксации соответственно. Здесь m, d, c_p — масса, диаметр и теплоемкость материала частиц; k — коэффициент теплопроводности жидкости. При переходе к безразмерным уравнениям нами будут приняты следующие обозначения: $\rho = \bar\rho_p/\bar\rho_f$, $\tilde c = c_p/c_f$, $a = d/2$, $\tau_v = 2/9(a/h)^2(\rho_p^*/\rho_f)$, $\tau_T = (\tilde c\,\mathrm{Pr}/3)(a/h)^3(\rho_p^*/\rho_f)$. Здесь $\bar\rho_p$, $\bar\rho_f$ — плотности материала частиц и жидкости, c_f — теплоемкость несущей среды, h — характерный масштаб длины. Конвективное движение определяется тремя безразмерными параметрами: числом Прандтля $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$, числом Грасгофа $\mathrm{Gr} = g\beta\Theta h^3/\nu^2$ и числом Рэлея $\mathrm{Ra} = \mathrm{Pr}\mathrm{Gr}$. Через Θ, β, ν и χ обозначены характерная разность температур, коэффициент теплового расширения, кинематическая вязкость и температуропроводность несущей среды соответственно.

Положим, что в равновесном состоянии температура и объемная концентрация смеси являются однородными и постоянными. При этом скоростью оседания частиц $\mathrm{v}_s = \tau_v^{'}\mathrm{g}$ пренебрегаем, принимая величину $\tau_v^{'}$ достаточно малой. Скоростью оседания можно пренебречь, например, в том случае, когда длина l проточной части канала достаточна мала, чтобы можно было пренебречь изменением концентрации примеси, обусловленным процессом осаждения. При этом величина l должна намного превышать размеры переходной области δl. Будем считать, что объемная концентрация достаточно мала так, что кажущаяся вязкость смеси определяется формулой Эйнштейна [2]. Считается, что изменение плотности облака частиц обусловлено температурным расширением несущей жидкости [4]. На смесь действует массовая сила с ускорением $(g\sin\varphi, g\cos\varphi, 0)$.

Обозначим через r, φ, z цилиндрические координаты, а через u, v, w, $u^{(p)}, v^{(p)}, w^{(p)}$ — компоненты поля скоростей в несущей среде и в облаке частиц соответственно. В принятых обозначениях уравнения движения запишутся следующим образом:

$$u_t + Ku - \frac{v^2}{r} = -p_r + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\Delta u - \frac{2}{r^2}v_\varphi - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\theta\sin\varphi + \frac{\rho}{\tau_v}\left(u^{(p)} - u\right), \quad (1)$$

$$v_t + Ku + \frac{uv}{r} = -\frac{p_\varphi}{r} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\Delta v + \frac{2}{r^2}u_\varphi - \frac{v}{r^2}\right) + \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\theta\cos\varphi + \frac{\rho}{\tau_v}\left(v^{(p)} - v\right), \quad (2)$$

$$w_t + Kw = -p_z + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta w + \frac{\rho}{\tau_v}\left(w^{(p)} - w\right), \quad (3)$$

$$u_r + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}v_\varphi + w_z = 0, \quad (4)$$

$$\theta_t + K\theta = \frac{1}{\mathrm{RePr}}\Delta\theta + \frac{\rho\tilde c}{\tau_T}\left(\theta^{(p)} - \theta\right), \quad (5)$$

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\varphi\varphi} + f_{zz},$$

$$Kf = uf_r + \frac{v}{r}f_\varphi + wf_z,$$

$$u_t^{(p)} + u^{(p)} - \frac{v^{(p)2}}{r} = \frac{1}{\tau_v}\left(u - u^{(p)}\right), \quad (6)$$

$$v_t^{(p)} + Kv^{(p)} + \frac{u^{(p)}v^{(p)}}{r} = \frac{1}{\tau_v}\left(v - v^{(p)}\right), \quad (7)$$

$$w_t^{(p)} + Kw^{(p)} = \frac{1}{\tau_v}\left(w - w^{(p)}\right), \quad (8)$$

$$\theta_t^{(p)} + K\theta^{(p)} = \frac{1}{\tau_T}\left(\theta - \theta^{(p)}\right), \quad (9)$$

$$\rho_t + K\rho = -\rho\left(u_r^{(p)} + \frac{u^{(p)}}{r} + \frac{1}{r}v_\varphi^{(p)} + w_z^{(p)}\right). \quad (10)$$

Символом θ обозначено отклонение температуры от равновесной.

Инвариантное решение [7] уравнений системы (1)–(10) можно представить в виде:

$$\begin{gathered} u = u(r,\varphi,t), v = v(r,\varphi,t), w = w(r,\varphi,t),\\ u^{(p)} = u^{(p)}(r,\varphi,t), v^{(p)} = v^{(p)}(r,\varphi,t),\\ w^{(p)} = w^{(p)}(r,\varphi,t),\\ \theta = -Az + T(r,\varphi,t),\\ \theta^{(p)} = -A^{(p)}z + T^{(p)}(r,\varphi,t),\\ p = (-Ar\sin\varphi + G)\,z + q(r,\varphi,t). \end{gathered}$$

Здесь символами A, $A^{(p)}$ и G обозначены безразмерные постоянные. Неизвестные u, v, w, q, T, $u^{(p)}, v^{(p)}, w^{(p)}, T^{(p)}$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$u_t + Ku - \frac{v^2}{r} = -q_r + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\Delta u - \frac{2}{r^2}v_\varphi - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}T\sin\varphi + \frac{\rho}{\tau_v}\left(u^{(p)} - u\right), \quad (11)$$

$$v_t + Ku + \frac{uv}{r} = \frac{q_\varphi}{r} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\Delta v + \frac{2}{r^2}u_\varphi - \frac{v}{r^2}\right) + \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}T\cos\varphi + \frac{\rho}{\tau_v}\left(v^{(p)} - v\right), \quad (12)$$

$$w_t + Kw - Ar\sin\varphi + G = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta w + \frac{\rho}{\tau_v}\left(w^{(p)} - w\right), \quad (13)$$

$$T_t + KT - Aw = \frac{1}{\mathrm{RePr}}\Delta T + \\ + \frac{\rho\tilde{c}}{\tau_T}\left(T^{(p)} - T\right), \qquad (14)$$

$$u_r + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}v_\varphi = 0, \qquad (15)$$

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\varphi\varphi},$$

$$Kf = uf_r + \frac{v}{r}f_\varphi,$$

$$u_t^{(p)} + Ku^{(p)} - \frac{v^{(p)2}}{r} = \frac{1}{\tau_v}\left(u - u^{(p)}\right), \qquad (16)$$

$$v_t^{(p)} + Kv^{(p)} + \frac{u^{(p)}v^{(p)}}{r} = \frac{1}{\tau_v}\left(v - v^{(p)}\right), \qquad (17)$$

$$w_t^{(p)} + Kw^{(p)} = \frac{1}{\tau_v}\left(w - w^{(p)}\right), \qquad (18)$$

$$T_t^{(p)} + KT^{(p)} - A^{(p)}w^{(p)} = \frac{1}{\tau_T}\left(T - T^{(p)}\right), \qquad (19)$$

$$\rho_t + K\rho = -\rho\left(u_r^{(p)} + \frac{u^{(p)}}{r} + \frac{1}{r}v_\varphi^{(p)}\right). \qquad (20)$$

2. Формулировка начально-краевых условий. Для системы (11)–(20) возникает несколько возможных задач. Во-первых, течение в длинной трубе, на стенках которой поддерживается постоянный осевой градиент температуры; во-вторых, на стенках канала поддерживается фиксированная температура; в-третьих, на стенках задается постоянная величина погонной плотности потока тепла q_l. Поле скоростей на границах канала удовлетворяет условиям прилипания для несущей среды и непроницаемости для примеси. Обозначим через Ω поперечное сечение канала, $\Omega = \{(r,\varphi) : r < R, 0 \le \varphi < 2\pi\}$, $\Omega = \{(r,\varphi) : R_1 < r < R_2, 0 \le \varphi < 2\pi\}$. Первый случай соответствует круглой трубе, второй — коаксиальному цилиндру. Обозначим через Γ границу области Ω, через Q_τ — цилиндр, $(r,\varphi) \in \Omega$, $0 < t < \tau$, через B_τ — его боковую поверхность. Таким образом, можно сформулировать следующую задачу: при заданной величине G найти решение системы (11)–(20). Соответствующие начальные условия запишутся в виде:

$$(r,\varphi) \in \Omega, t = 0,$$
$$u = u_0,\ v = v_0,\ w = w_0,$$
$$u^{(p)} = u_0^{(p)},\ v^{(p)} = v_0^{(p)},\ w^{(p)} = w_0^{(p)},$$
$$T = T_0,\ T^{(p)} = T_0^{(p)},\ \rho = \rho_0.$$

Условия на границе могут быть представлены следующим образом:

$$(r,\varphi,t) \in B_\tau,$$
$$u = v = w = 0,$$
$$u^{(p)} = v^{(p)} = w^{(p)} = 0.$$

Однородные условия для поля скоростей. Для температурного поля возможны три типа условий.

$$T = 0, T^{(p)} = 0, \qquad (21)$$
$$T(R) = T^{(p)}(R) = T_1,$$
$$T(R_1) = T^{(p)}(R_1) = T_1,$$
$$T(R_2) = T^{(p)}(R_2) = T_2, \qquad (22)$$
$$T_r(R) = -\rho\tilde{c}\mathrm{Pr}q_l. \qquad (23)$$

Условие (21) соответствует случаю постоянного осевого градиента температуры, условие (22) — заданная температура на стенках канала, условие (23) — постоянство теплового потока.

3. Стационарное решение. Система (11)–(20) допускает стационарное решение, если предположить, что единственная ненулевая азимутальная компонента скорости совпадает в несущей среде и в облаке частиц. Известно, что стационарная задача локально разрешима в случае однородной жидкости [7]. Предположим также, что не зависящая от времени относительная массовая концентрация примеси является постоянной. В этом случае уравнения (11)–(20) можно переписать следующим образом:

$$q_r = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}T\sin\varphi, \qquad (24)$$

$$\frac{q_\varphi}{r} = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}T\cos\varphi, \qquad (25)$$

$$-Ar\sin\varphi + G = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta w, \qquad (26)$$

$$-Aw = \frac{1}{\mathrm{RePr}}\Delta T + \frac{\rho\tilde{c}}{\tau_T}\left(T^{(p)} - T\right), \qquad (27)$$

$$-A^{(p)}w = \frac{1}{\tau_T}\left(T - T^{(p)}\right). \qquad (28)$$

Решение уравнений (24)–(28) можно записать следующим образом:

$$w(r,\varphi) = -\sin\varphi\left[A\mathrm{Re}\frac{r^3}{8} + C_0 r\right] + \\ + G\mathrm{Re}\frac{r^2}{4} + C_1\ln r + C_2,$$

$$T(r,\varphi) = \sin\varphi f_1(r) + f_2(r),$$

$$f_1(r) = -\frac{A\tilde{A}\mathrm{Re}}{4\cdot 6\cdot 8}r^5 - C_0\frac{\tilde{A}}{8}r^3 + C_3 r,$$

$$f_2(r) = \tilde{A}G\mathrm{Re}\frac{r^4}{4^3} + \tilde{A}\left(C_2 - C_1\right)\frac{r^2}{4} +$$
$$+\tilde{A}C_1\frac{r^2}{4}\ln r + C_4\ln r + C_5,$$
$$T^{(p)} = T + \tau_T A^{(p)} w.$$

В случае длинной трубы, целиком заполненной смесью, естественные условия на оси дадут $C_1 = 0$, $C_4 = 0$. Условия на стенке и постоянство полного расхода смеси через сечение трубы позволяют определить оставшиеся константы.

Заключение. Получено частично инвариантное стационарное решение уравнений, описывающих конвективное движение дисперсной смеси в горизонтальной цилиндрической трубе. Видно, что распределения температуры и поля скоростей зависят от азимутального угла, а поле температур в несущей среде и облаке частиц не совпадает и определяется временем тепловой релаксации.

Библиографический список

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. — М., 1987.

2. Соу С.Л. Гидродинамика многофазных систем. — М., 1971.

3. Balachandar S., Eaton J.K. Turbulent Dispersed Multiphase Flow // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2010. — Vol. 42.

4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. — М., 1989.

5. Никитенко Н.Г., Сагалаков А.М., Попов Д.И. О достаточных условиях устойчивости течения Куэтта — Пуазейля монодисперсной смеси // Теплофизика и аэромеханика. — 2011. — №2.

6. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М., 1972.

7. Birikh R.V., Pukhnachev V.V. An axial convective flow in a rotating tube with a longitudinal temperature gradient // Doklady Physics. — 2011. — Vol. 56, №1.